L.TATAOUINE **Mr: KHEBIR.R**
DEC 2008 **4 MATHS 2**

DEVOIR DE SYNTHESE N°1

Discipline : Mathématiques

" L'attention des élèves est attirée , sur le fait que la qualité de la rédaction , la clarté et la précision des raisonnement entrent pour part importante dans l'appréciation des copies"

EXERCIXE N°1 (4,5Points)

Pour chacune des questions suivantes une seule de trois réponses est exacte Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie .Aucune justification n'est demandée

1) On considère la fonction f définie par $f :\longmapsto -\ 2x + \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

- a- f définie sur $[0, +\infty[$
- b- La fonction est impaire
- c- La droite Δ : y = -2x est une asymptote à la courbe © de f au voisinage de $+\infty$

2) Soit f la fonction f définie sur IR* par : $f(x) = x^2 cos^2\left(\frac{2\pi}{x}\right)$

- a- La fonction f est bornée
- b- Pour tout réel non nul on a : $0 \leq f(x) \leq x^2$
- c- $lim_{x\to 0} f(x) = 1$

3) Soit U la suite définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = U_n - n \end{cases}$

- a- U est une suite arithmétique de raison $-n$
- b- La suite U est décroissante
- c- Pour tout n de IN on a : $U_n = -\frac{n(n+1)}{2}$

4) Soit (Z_n) la suite complexe définie par : $Z_0 = 1$ et pour tout n de IN :

$$Z_{n+1} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{3} Z_n$$

- a- Z_3 est un nombre réel
- b- Pour tout n de IN , $Z_n = \frac{e^{-i\frac{n\pi}{4}}}{3^n}$
- c- $lim_{n\to+\infty} |Z_n| = +\infty$

5) Soit f la fonction définie sur$]0,+\infty[$par ; $f : x \longmapsto \sqrt[5]{x}$

et sa fonction dérivée est définie par :

a-$f : x \longmapsto \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$ b- $f : : x \longmapsto \frac{1}{4\sqrt[5]{x^4}}$ c-$f : x \longmapsto \frac{1}{5\sqrt[5]{x}}$

6) Soit f la fonction définie sur [0,1] par $f(x) = sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

la dérivée de sa fonction réciproque est définie par :

a)$f^{-1} : x \longmapsto \frac{1}{\pi\sqrt{1+x^2}}$ b) $f^{-1} : x \longmapsto \frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}$ c)$f^{-1} : x \longmapsto \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$

EXERCIXE N°2 *(7Points)*

Soit f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ *par :* $f(x)=\frac{1}{x-1}-\sqrt{x}$

1) a- Etudier les variations de f

b- En déduire que l'équation f(x)=0 admet dans $]1,+\infty[$ *une solution unique* α *et que* $\alpha \in \left]\frac{3}{2},2\right[$

c- Montrer que l'équation f(x)=0 est équivalente à $1+\frac{1}{\sqrt{x}}=x$

2) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ *par :* $g(x)=1+\frac{1}{\sqrt{x}}$

a- Montrer que pour tout x de $[1,+\infty[\,; |g'(x)|\leq\frac{1}{2}$

b- Montrer que g est une bijection de $]1,+\infty[$ *sur un intervalle J que l'on précisera*

c- Exprimer $g^{-1}(x)$ *pour* $x\in J$

3) Soit la suite U *définie sur IN par :* $U_0=\frac{3}{2}$ *et pour tout n de IN ,* $U_{n+1}=g(U_n)$

a- Montrer que pour tout de IN, on a : $|U_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2}|U_n-\alpha|$

b- En déduire que pour tout n de IN , on a : $|U_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n$

c- Montrer alors que la suite U *est convergente et calculer sa limite*

4) Soit h la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right[$ *par :* $\begin{cases} h(x) = g\left(\left[\left(\frac{1-tgx}{tgx}\right)^2\right]\right) & si\ 0<x<\frac{\pi}{4} \\ h(0)=1 \end{cases}$

a- Montrer que pour tout $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right[, h(x)=\frac{1}{1-tgx}$

b- Montrer que h réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{4}\right[$ *sur un intervalle K qu'on précisera .(On note* h^{-1} *sa réciproque)*

c- Montrer que h^{-1} *est dérivable sur K et calculer sa fonction dérivée* $(h^{-1})'$

EXERCIXE N°3:(4Points)

1) θ étant un réel de l'intervalle $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, on considère l'équation

$$(E)\ z^2 - 2e^{i\theta}\cos\theta\, z + e^{2i\theta} = 0$$

a- Vérifier que $\left(4\cos^2\theta e^{2i\theta} - 4e^{2i\theta}\right) = \left(2i\sin\theta\, e^{i\theta}\right)^2$

b- Résoudre alors dans C l'équation (E).

2) Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$

On désigne par A et M les points d'affixes respectives 1 et $e^{2i\theta}$

a- Déterminer l'ensemble des points M quand θ varie dans l'intervalle $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

b- Déterminer l'affixe du point C tel que OACM soit un losange.

c- Déterminer le réel θ pour que la mesure de l'air du losange OACM soit égale $\frac{1}{2}$

EXERCIXE N °3 :(4,5 Points)

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct (o ,$\vec{u}$,$\vec{v}$)

On donne les points A et B d'affixes respectives 2i et i

Soit l'application f de P/{B} dans P qui a tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z tel que $z' = \frac{iz+2}{z-i}$

1) Déterminer les points invariants par l'application f et exprimer leurs affixes sous forme algébrique et trigonométrique

2) a - Montrer que pour tout $z \neq i$ et $z \neq 2i$,

$$|z'| = \frac{AM}{BM} \quad \text{et} \quad \arg(z') \equiv \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM})[2\pi]$$

b - Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M(z) tels que $|z'| = 1$

c - Déterminer et construire l'ensemble (F des points M(z) tels que

$$\arg(z') \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$$

3) a - Calculer $(z'-i)(z-i)$ pour $z \neq i$

b - En déduire l'ensemble décrit par le point M' lorsque le point M décrit le cercle de centre B et de rayon ½