

EXERCICE N° 1 (7 points)

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}} - 1$.

On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité 2cm).

- 1) a - Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$. Interpréter graphiquement ce résultat.
b - Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- 2) a - Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1-x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$.
b - Dresser le tableau de variation de f .
- 3) a - Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisses 0.
b- Etudier la position relative de C_f par rapport à T .
c - Tracer T et C_f .

EXERCICE N° 2 (7 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) (unité graphique 2cm), on considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$Z_A = 2, Z_B = 1 + i\sqrt{3}, Z_C = 1 - i\sqrt{3}$$

Partie A

- 1)a - Donner la forme trigonométrique de Z_B , puis de Z_C
b-Placer les points A, B et C
- 2)Déterminer la nature du quadrilatère OBAC
- 3) Déterminer et construire l'ensemble Δ des points M du plan d'affixes Z tels que $|z| = |z-2|$

Partie B

A tout point M d'affixe Z tel que $Z \neq Z_A$, on associe le point M' d'affixe Z' défini par :

$$Z' = \frac{-4}{Z-2}$$

- 1) Déterminer et placer le point G' associé au centre de gravité G du triangle OAB

2) a - Démontrer que pour tout nombre complexe z distinct de 2 : $|z'-2| = \frac{2|z|}{|z+2|}$
 b - On suppose en outre que M est un point quelconq de ζ est l'ensemble défini à la question 3) de la partie A). Démontrer que le point M' associé à M appartient à un cercle ζ' dont on précisera le centre et le rayon. Tracer ζ'

EXERCICE N° 3 (6 points)

le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) (unité graphique 2cm)

On pose $Z_0 = 2$ et , pour tout entier naturel n , $Z_{n+1} = \frac{1+i}{2} Z_n$. On note A_n le point d'affixe Z_n

1) Calculer Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 et vérifier que Z_4 est un nombre réel
 Placer les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 sur une figure

2) Pour tout entier naturel n , on pose $U_n = |Z_n|$
 Justifier que la suite (U_n) est une suite géométrique puis établir que , pour tout entier naturel n , $U_n = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n$

3) a- Montrer que , pour tout entier naturel n , $\frac{Z_{n+1}-Z_n}{Z_{n+1}} = i$
 b- En déduire la nature du triangle $O A_n A_{n+1}$