Lycée Tahar Sfar Mahdia	**Devoir de synthèse n° 3** Mathématiques	Niveau : 3 ème Math
Date : 23 / 05 / 2018	Prof : MEDDEB Tarek	Durée : 3 heures

***NB* : Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation.**

Exercice n°1 : (5 pts)

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points $A(1\,;-2\,;0)$, $B(1\,;0\,;-2)$ et $C(3\,;-2\,;-2)$.

1) $a/$ Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

$b/$ En déduire que les points A, B et C déterminent un plan P dont une équation cartésienne est : $x+y+z+1=0$.

2) Soit $S=\left\{M(x\,;y\,;z) \text{ tel que } x^2+y^2+z^2-2x+4y+4z+5=0\right\}$.

$a/$ Montrer que S est une sphère dont on déterminera le centre I et le rayon R.

$b/$ Montrer que l'intersection de la sphère S et du plan P est un cercle $\mathscr{C}$.

$c/$ Vérifier que A appartient à $\mathscr{C}$.

$d/$ Déterminer les coordonnées du centre H et le rayon r de $\mathscr{C}$.

3) Soit $M(a\,;\,b\,;-1)$ un point de la sphère S, où a et b sont deux réels.

Soit Q le plan d'équation : $(a-1)x+(b+2)y+z-a+2b+3=0$.

$a/$ Montrer que M appartient à Q .

$b/$ Montrer que S et Q sont tangents en M.

Exercice n°2 : (2,5 pts)

1) $a/$ Vérifier que 149 est un nombre premier.

$b/$ Soit a un entier naturel tel que $a\leq 148$. Montrer que $a^{148}-1$ est divisible par 149.

2) On pose $S(a)=1+a+a^2+.....+a^{147}$.

$a/$ Montrer que $a^{148}-(a-1)S(a)=1$.

$b/$ En déduire que a^{148} et $(a-1)$ sont premier entre eux.

$c/$ Montrer que $S(a)$ est divisible par 149.

Exercice n°3 : *(4 pts)*

1) On considère dans $IN \times IN$ l'équation $(E): 11x - 24y = 1$.

   $a/$ Montrer que si $(x\,;y)$ est solution de (E) alors x et y sont premier entre eux.

   $b/$ Montrer que $(x\,;y)$ est solution de (E) si, et seulement si $11(x-11) - 24(y-5) = 0$.

   $c/$ Résoudre dans $IN \times IN$ l'équation (E).

2) $a/$ Montrer que, pour tout $n \in IN$, $10^n - 1$ est divisible par 9.

   $b/$ Montrer que si $(n\,;m)$ est solution de (E) alors $(10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1) = 9$.

   $c/$ Soit a un entier naturel, vérifier que : $a^n - 1 = (a-1)(1 + a + a^2 + ... + a^{n-1})$.

   $d/$ En déduire qu'il existe deux entiers naturels N et M tels que $(10^{11} - 1)N - (10^{24} - 1)M = 9$.

   $e/$ Calculer alors $(10^{11} - 1) \wedge (10^{24} - 1)$.

Exercice n°4 : *(4,5 pts)*

1) Soit u la fonction définie sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$ par : $u(x) = \tan x - x$.

   $a/$ Etudier les variations de u sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$.

   $b/$ En déduire le signe de $u(x)$ pour $x \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$.

2) Soit f la fonction définie sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$ par : $f(x) = \tan x - \frac{4}{\pi}x$.

   $a/$ Montrer que f est deux fois dérivable sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$ et que $f''(x) = 2\tan x(1 + \tan^2 x)$.

   $b/$ Etudier les variations de f' sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$.

   $c/$ En déduire qu'il existe un unique réel α dans $\left]0\,;\,\frac{\pi}{4}\right[$ tel que $f'(\alpha) = 0$.

   $d/$ Comparer α et $\frac{\pi}{6}$.

3) $a/$ Etablir le tableau de variations de f sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$.

   $b/$ Montrer que $f(\alpha) = \sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}} - \frac{4}{\pi}\alpha$.

4) $a/$ Ecrire une équation de la tangente T à C_f ou point d'abscisse 0.

   $b/$ Etudier la position de C_f par rapport à T.

Exercice n°5 : (4 pts)

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 et d'une pièce de monnaie.

L'urne U_1 contient trois boules numérotées 1, 2 et 3.

L'urne U_2 contient deux boules numérotées 1 et 3.

La pièce de monnaie est truquée, de telle sorte que: lorsqu'elle est lancée, la probabilité d'obtenir face "F" est le double de celle d'obtenir pile "P".

1) Calculer $p(P)$ et $p(F)$.

2) On lance la pièce de monnaie.

Si le côté visible est pile, on tire une boule de U_1 et une boule de U_2.

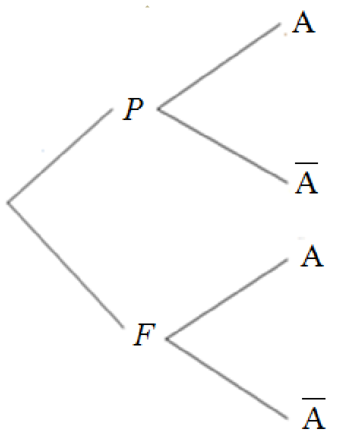
Si le côté visible est face, on tire successivement et avec remise deux boules de U_1.

On considère les événements:

A : « Les deux boules tirées portent le numéro 1 ».

B : « Parmi les deux boules tirées, une au moins porte le numéro 3 ».

$a/$ Compléter l'arbre pondéré suivant :



$b/$ Calculer alors la probabilité de l'événement A.

$c/$ Montrer de même que $p(B)=\dfrac{16}{27}$.

3) On désigne par X le plus grand de deux nombres inscrits sur les deux boules tirées.

$a/$ Déterminer $p(X=1)$ et $p(X=3)$.

$b/$ En déduire $p(X=2)$.

Bonne chance