Lycée Tahar Sfar Mahdia	**Devoir de contrôle n° 3** *Mathématiques*	*Niveau : 3 ème Math*
Date : 23 / 04 / 2019	*Prof : MEDDEB Tarek*	*Durée : 2 heures*

NB : *Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation.*

Exercice n°1 : (6 pts)

A- Soit a un entier naturel.

1) $a/$ Montrer que a^2-a est divisible par 2.

   $b/$ En déduire que a est pair si, et seulement si a^2 est pair.

2) Montrer que si a est impair alors a^2-1 est divisible par 8.

3) Montrer, par récurrence, que si a est impair, alors pour tout $n\geq 1$, a^n est impair.

B- On se propose de déterminer l'ensemble E des couples d'entiers naturels non nuls (n,q) tels que $q^2-3^{2n}=16$.

1) Soit (n,q) est un élément de E.

   $a/$ Montrer que q est impair.

   $b/$ Justifier que les entiers $q-3^n$ et $q+3^n$ sont pairs.

2) On pose $d=(q-3^n)\wedge(q+3^n)$.

   $a/$ Montrer que d divise $2q$ et que d divise 16. En déduire que $d=2$.

   $b/$ Montrer que $q-3^n=2$ et que $q+3^n=8$.

   $c/$ Déterminer alors l'ensemble E.

Exercice n°2 : (5 pts)

Une urne contient six boules numérotées -1, 0, 0, 1, 1, 1.

Une épreuve consiste à tirer successivement et sans remise deux boules de l'urne. On désigne par a le chiffre indiqué sur la première boule tirée et par b le chiffre indiqué sur la deuxième boule tirée.

1) Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

   A : « Obtenir une somme $(a+b)$ nulle ».

   B : « Obtenir un produit ab non nul ».

   C : « Obtenir une somme $(a+b)$ nulle et un produit ab non nul ».

2) A chaque couple (a,b) obtenu, on associe le nombre $X = ab$.

$a/$ Déterminer les valeurs possibles de X.

$b/$ Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

"$X = 0$", "$X = 1$" et "$X = -1$".

3) On répète l'épreuve précédente trois fois de suite, en remettant à chaque fois les deux boules tirées dans l'urne. Soit n le nombre de fois où l'événement "$X = 0$" est réalisé.

Calculer $p(n = 2)$.

Exercice n°3 : (6 pts)

Soient U et V les suites définies sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 1 \;\; et \;\; V_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n + 4\, V_n}{5} \\ V_{n+1} = \dfrac{2\, U_n + 3\, V_n}{5} \end{cases}$

1) On pose $W_n = V_n - U_n$ pour tout $n \in IN$.

$a/$ Montrer que W est une suite géométrique.

$b/$ Exprimer W_n en fonction de n.

2) On pose, pour tout $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} W_k$.

Montrer que $S_n = \frac{5}{6}\left(1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^n\right)$ et calculer $\lim_{n \to +\infty} S_n$.

3) $a/$ Montrer que, pour tout $n \in IN$, on a : $U_{n+1} - U_n = \frac{4}{5} W_n$.

$b/$ En déduire que : $U_n = \frac{4}{5} S_n + 1$, pour tout $n \in IN^*$, puis calculer $\lim_{n \to +\infty} U_n$.

4) On pose : $T_n = U_n + 2\, V_n$ pour tout $n \in IN$.

$a/$ Montrer que T est une suite constante.

$b/$ En déduire $\lim_{n \to +\infty} V_n$.

Exercice n°4 : (3 pts)

Soit $n \in IN^*$. On pose : $a_n = 1 \times 3 \times 5 \times \ldots\ldots \times (2n-1)$ et $b_n = (n+1)(n+2) \times \ldots\ldots \times (2n-1)(2n)$.

1) Montrer que : $(2n)! = 2^n n! a_n$.

2) En déduire que b_n est divisible par 2^n.

Bonne chance