

Lycée Tahar Sfar Mahdia	<i>Devoir de contrôle n° 3</i> Mathématiques	Niveau : 3 ^{ème} Math
Date : 07 / 03 / 2018	Prof : MEDDEB Tarek	Durée : 2 heures

NB : Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation.

Exercice n°1 : (5 pts)



Soit α un réel donné tel que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

On considère les suites U et V définies sur IN par :

$$\begin{cases} U_0 = 1 & \text{et} & V_0 = 2 \\ U_{n+1} = \alpha U_n + (1-\alpha)V_n \\ V_{n+1} = \alpha V_n + (1-\alpha)U_n \end{cases}$$

1) Soit W la suite définie sur IN par : $W_n = V_n - U_n$.

a/ Calculer W_0 et W_1 .

b/ Montrer, par récurrence que, pour tout $n \in IN$, $W_n = (2\alpha - 1)^n$.

c/ En déduire la limite de la suite W .

2) a/ Montrer que, pour tout $n \in IN$, $U_n \leq V_n$.

b/ Montrer que U est croissante et que V est décroissante.

c/ On admet que les suites U et V sont convergentes, montrer qu'elles convergent vers la même limite ℓ .

3) On pose, pour tout $n \in IN$, $t_n = U_n + V_n$.

a/ Montrer que t est une suite constante.

b/ En déduire la valeur de la limite ℓ .

Exercice n°2 : (4 pts)

En utilisant sept cartes numérotées de 1 à 7. Combien peut-on former des nombres :

1) De trois chiffres ?

2) De sept chiffres ?

3) Pairs de trois chiffres ?

4) De trois chiffres contenant le chiffre 1 ?

5) De sept chiffres où les chiffres 1, 2 et 3 sont voisins dans cet ordre ?

6) De sept chiffres où les chiffres 1, 2 et 3 sont voisins dans un ordre quelconque ?

Exercice n°3 : (5 pts)

1) Soit U la suite définie sur \mathbb{N} par :
$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{U_n^2 + 2}{2U_n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

a/ Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $U_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(U_n - \sqrt{2})^2}{2U_n}$.

b/ Montrer, par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n > \sqrt{2}$.

c/ Montrer que la suite U est décroissante.

2) a/ En utilisant la relation établie dans la question 1), montrer que :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < U_{n+1} - \sqrt{2} < k(U_n - \sqrt{2})$, où $k = \frac{2 - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$.

b/ En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < U_n - \sqrt{2} < k^n$.

c/ Déterminer alors la limite de la suite U .

Exercice n°4 : (6 pts)

On considère la pyramide régulière $SABCD$ de sommet S constituée de la base le carré $ABCD$ et de triangles équilatéraux.

Le point O est le centre du carré $ABCD$ et on pose $OB = 1$.

On rappelle que le segment $[SO]$ est la hauteur de la pyramide et que toutes les arêtes sont isométriques.

1) Justifier que le repère $(O, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OS})$ est orthonormé.

Dans la suite de l'exercice, on se place dans le repère $(O, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OS})$.

2) Soit K le point défini par $\overrightarrow{DK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DS}$ et I le milieu de $[OS]$.

a/ Montrer que K a pour coordonnées $(-\frac{1}{3}, 0; \frac{2}{3})$

b/ En déduire que les points B, I et K sont alignés.

c/ La parallèle à (AD) menée de K coupe $[AS]$ en L . Déterminer les coordonnées de L .

3) On considère le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dans la base $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OS})$.

a/ Montrer que \vec{n} est un vecteur normal au plan (BCI) .

b/ Montrer que les vecteurs \vec{n} , \overrightarrow{AS} et \overrightarrow{DS} sont linéairement dépendants.

c/ Quelle est la position relative des plans (BCI) et (SAD) ? Justifier.

