

Exercice n°1 : (6,5 pts)A- Questions préliminaires :

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs du plan tels que $\vec{u} \neq \vec{0}$.

On pose : $\text{aff}(\vec{u}) = x + iy$ et $\text{aff}(\vec{v}) = x' + iy'$, où x, y, x' et y' sont des réels.

1) Montrer que :
$$\frac{\text{aff}(\vec{v})}{\text{aff}(\vec{u})} = \frac{xx' + yy'}{x^2 + y^2} + i \frac{xy' - x'y}{x^2 + y^2}.$$

2) En déduire l'équivalence :

(\vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux) si, et seulement si ($\frac{\text{aff}(\vec{v})}{\text{aff}(\vec{u})}$ est imaginaire).

B- 1) a/ Vérifier que, pour tout nombre complexe z on a : $z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = (z - \sqrt{3})^2 + 1$.

b/ Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0$.

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

Soit \mathcal{C} le cercle de centre O et de rayon 2. A est le point d'affixe $z_A = 2$. B est le point de \mathcal{C} tel que $\text{Im}(B) = 1$ et $\text{Re}(B) > 0$. On construit le carré direct $OBEF$ (voir figure).

a/ Montrer que : $z_B = \sqrt{3} + i$ et que

$$z_F = -1 + i\sqrt{3}.$$

b/ Déterminer la forme algébrique de z_E , puis vérifier que $z_E = (1+i)z_B$.

c/ Ecrire z_E sous la forme trigonométrique.

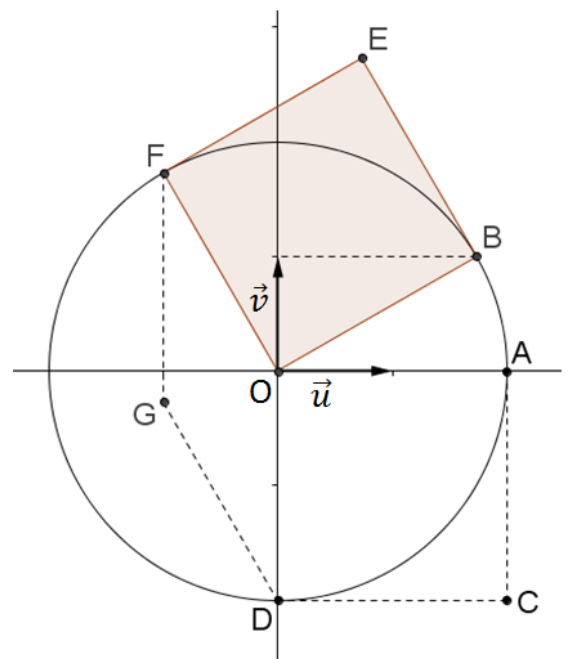
En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et

$$\sin \frac{5\pi}{12}.$$

3) Soient C et D les points d'affixes respectives $z_C = 2 - 2i$ et $z_D = -2i$. On construit le point G tel que $OFGD$ est un parallélogramme.

a/ Montrer que : $z_G = i(z_B - 2)$.

b/ Montrer que : $\frac{z_E - z_G}{z_C - z_G} = i$, en déduire que le triangle CEG est rectangle et isocèle.



Exercice n°2 : (6,5 pts)

- 1) Soit u la fonction définie sur $[0 ; \pi]$ par : $u(x) = x \sin x + \cos x$.
- a/ Etudier les variations de u .
- b/ Montrer que l'équation : $u(x) = 0$ admet dans l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$ une solution unique α .
- c/ Déterminer, suivant les valeurs de x , le signe de $u(x)$ dans $[0 ; \pi]$.
- 2) Soit f la fonction définie sur $]0 ; \pi]$ par : $f(x) = \frac{\cos x}{x}$.

On désigne par \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- a/ Montrer que, pour tout $x \in]0 ; \pi]$, $f'(x) = -\frac{u(x)}{x^2}$.
- b/ Etablir le tableau de variations de f .
- c/ Montrer que : $f(\alpha) = -\sin \alpha$.
- 3) Soit T la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$.
- a/ Déterminer l'équation réduite de T .
- b/ Soit $h(x) = \cos x + \frac{2}{\pi}x^2 - x$, $x \in [0 ; \pi]$.
Déterminer $h'(x)$ et $h''(x)$.
- c/ Etudier les variations de h' . Calculer $h'\left(\frac{\pi}{2}\right)$, en déduire le signe de $h'(x)$ suivant les valeurs de x .
- d/ Etudier les variations de h , en déduire que $h(x) \geq 0$, pour tout $x \in [0 ; \pi]$.
- e/ Déduire, de ce qui précède, la position de \mathcal{C} par rapport à T pour $x \in]0 ; \pi]$.

Exercice n°3 : (3,5 pts)

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{\sin^3 x}{(\sin x - 1)^2}$.

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1) a/ Déterminer le domaine de définition de f , noté D .
- b/ Montrer que f est 2π -périodique.
- c/ Montrer que la droite $\Delta : x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de C_f .
- 2) a/ Montrer que, pour tout $x \in D$, on a : $f'(x) = \frac{\cos x \sin^2 x (\sin x - 3)}{(\sin x - 1)^3}$.

b/ Dresser le tableau de variations de f sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

c/ Tracer la représentation graphique de la restriction de f à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right] \cap D$ de la feuille annexe.

Exercice n°4 : (3.5 pts)

Une urne contient quatre boules blanches numérotées 1, 2, 3, 4 et quatre boules noires numérotées 0, 1, 2, 3 et deux boules vertes numérotées 0, 1.

- 1) On tire simultanément trois boules. Déterminer le nombre de tirages donnant :
 - a/ Trois boules de même couleur.
 - b/ Au moins une boule blanche.
 - c/ Une somme paire de chiffres.
- 2) On tire successivement et sans remise cinq boules. Déterminer le nombre de tirages donnant :
 - a/ La boule portant le numéro 4.
 - b/ Exactement trois boules blanches.
 - c/ Un produit nul de chiffres.

Bonne chance

FEUILLE ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

Devoir de synthèse n° 2 (04 – 03 – 2014)

Nom et prénom :

Classe : 3^{ème} Math

