Lycée Houmet Souk 1 Prof : Loukil Mohamed	Devoir de Synthèse N : 2 Durée : 3 Heures	3 Mathématique 04 Mars 2013

EXERCICE N : 1 (2.5 points)

A) Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en A tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$,on note $I = B*C$ et $J = A*C$

1) R est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$,alors :

a) $R = S_{(AC)} \, o \, S_{(AB)}$ **b)** $R = S_{(AC)} \, o \, S_{(AI)}$ **c)** $R = S_{(AB)} \, o \, S_{(AI)}$

2) S_I est la symétrie central de centre I , alors :

a) $S_I = S_{(AI)} \, o \, S_{(BC)}$ **b)** $S_I = S_{(AB)} \, o \, S_{(AC)}$ **c)** $S_I = S_{(AI)} \, o \, S_{(AC)}$

3) Soit t la translation du vecteur $\overrightarrow{AC}$, alors :

a) $t = S_{(IJ)} \, o \, S_{(AB)}$ **b)** $t = S_{(AB)} \, o \, S_{(IJ)}$ **c)** $t = S_{(AB)} \, o \, S_{(AC)}$

B) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O , \vec{u} , \vec{v})$.

1) On donne : $Z = \dfrac{1}{i + tg\theta}$ avec $\theta \in \left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$. Alors $\arg(Z) \equiv$

a) $\theta - \frac{\pi}{2} \; (2\pi)$ **b)** $\theta \; (2\pi)$ **c)** $\theta + \frac{\pi}{2} \; (2\pi)$

2) on considère les points A et B d'affixes respectives 1 et i .

L'ensemble des points M d'affixe Z tel que $\dfrac{Z-1}{Z-i}$ est imaginaire est :

a) une droite privé du point B **b)** la médiatrice de [AB] **c)** un cercle privé du point B

EXERCICE N : 2 (3.5 points)

Le plan est orienté dans le sens direct .

On considère le carré ABCD de centre O tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)$.

1) a) Construire les deux triangles équilatéraux directs ADF et AEB .

b) Montrer qu'il existe une unique rotation R telle que R (A) = D et R (E) = C .

c) Déterminer l'angle et le centre de R . (Expliquer)

2) Soit la droite Δ telle que : $R'_{(A ; \frac{\pi}{2})} = S_{(AB)} \, o \, S_{\Delta}$.

a) Montrer que la droite Δ est perpendiculaire à (AC) en A .

b) En décomposant convenablement la rotation $R''_{(B ; -\frac{\pi}{2})}$, montrer que : $R'' \, o \, R' = t_{\overrightarrow{AC}}$.

EXERCICE N : 3 (4 points)

Soit la suite (U_n) définie par : $U_0 = 2$ et pour tout $n \in IN$, $U_{n+1} = \dfrac{U_n^2 - U_n + 2}{1 + U_n}$.

1) Montrer par récurrence que pour tout $n \in IN$; $1 < U_n \leq 2$.

2) Montrer que la suite (U_n) est décroissante sur IN

3) a) Montrer que pour tout $n \in IN$, $U_{n+1} - 1 \leq \dfrac{1}{3}(U_n - 1)$.

b) En déduire que pour tout $n \in IN$, $0 < U_n - 1 \leq (\dfrac{1}{3})^n$.

c) Déterminer alors la limite de la suite (U_n) .

4) Pour tout $n \in IN^*$, on pose : $S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$.

a) Montrer que pour tout $n \in IN^*$ on a : $n < S_n \leq n + \dfrac{1}{2}[1 - (\dfrac{1}{3})^n]$.

b) Déduire alors $\lim_{n \to +\infty} S_n$ et $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{S_n}{n}$.

EXERCICE N : 4 (4 points)

A) Dans Le plan complexe muni du repère orthonormé direct $R(O, \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points

A , B , C et D d'affixes respectives : $Z_A = -6i$, $Z_B = 8$, $Z_C = 9 - 3i$ et $Z_D = 4 + 2i$.

1) Placer les points A , B , C et D .

2) On pose : $Z = \dfrac{Z_D - Z_A}{Z_C - Z_A}$ et $Z' = \dfrac{Z_D - Z_B}{Z_C - Z_B}$.

a) Donner la forme cartésienne puis trigonométrique des nombre complexes Z et Z' .

b) En déduire que les points A , B , C et D sont situés sur un même cercle $(\mathscr{C})$.

3) Construire $(\mathscr{C})$.

B) On pose Ω le centre de $(\mathscr{C})$ et R la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

1) Montrer que R (C) = D .

2) Prouver alors que : $\dfrac{Z_\Omega - Z_D}{Z_\Omega - Z_C} = i$.

3) Déduire alors les coordonnées du point Ω et le rayon du cercle $(\mathscr{C})$.

EXERCICE N : 5 ***(6 points)***

Soit f_m *la fonction définie par :* $f_m(x) = \dfrac{m-2x}{1-x}$ *où m paramètre réel .*

(C_m) *sa courbe représentative dans le repère orthonormé R* $(O, \vec{i}, \vec{j})$ *.*

1) *Montrer que les courbes* (C_m) *possèdent un centre de symétrie commun* Ω *que l'on précisera .*

2) a) *Déterminer* $(C_0) \cap (C_1)$ *.*

b) *Les courbes* (C_m) *passent elles par un point fixe ? (Justifier la réponse)*

3) *Etudier , suivant les valeurs du paramètre m , le sens de variations de* f_m *.*

4) *Pour tout réel* $m \neq 2$ *, on désigne par* T_m *la tangente à* (C_m) *au point d'abscisse 0 .*

a) *Ecrire une équation de* T_m *.*

b) *Montrer que les droites* T_m *sont concourantes en un points A dont déterminera les coordonnées.*

c) *Déterminer la tangente* T_m *ayant pour coefficient directeur 2 .*

d) *Tracer dans le repère R les droites* T_0 *et* T_4 *et les courbes* (C_0) *et* (C_4) *.*

5) *On donne les droites* $\Delta_k : y = 2x + k$ *où k paramètre réel .*

a) *Déterminer , suivant les valeurs de k , le nombre de point(s) d'intersection(s) de* Δ_k *et* (C_4) *.*

b) *Lorsque* Δ_k *coupe* (C_4) *en deux points distincts M' et M'',on désigne par M le milieu de [M'M'']*

Déterminer et construire l'ensemble (Γ) *des points M quand k varie .*