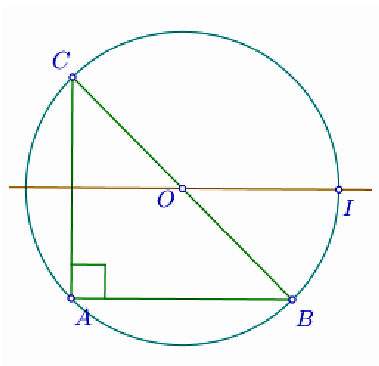
Prof	Mechmeche Imed	Devoir de synthèse N°2	Matière	Maths
Lycée	Borj-cedria		Date	06/03/2012
Niveau	3ème Maths		Durée	3 h

Exercice 1 : (3 pts)

Démontrer chacune des propositions suivantes en utilisant un raisonnement par récurrence.

1) Pour tout entier naturel n $4^n + 5^{2n+1}$ est divisible par 3.
2) Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$ $2^{n-1} \leq n\,!$

Exercice 2 : (6 pts)



Dans la figure ci-contre le triangle ABC est isocèle rectangle en A.

O est le centre du cercle circonscrit à ABC, (OI) est la médiatrice de $[AC]$.

Reproduire la figure sur votre copie et la compléter au fur et à mesure.

Soit R la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ qui Transforme C en A.

1) Montrer que I est le centre de R.
2) Soit D l'image de A par R, montrer que I, B et D sont alignés.
3) Soit Q le point de $[AB]$ tel que $AQ = CO$. Montrer que $R(O) = Q$.
4) Les droites (IA) et (CB) se coupent en E. Montrer que $R(E) = B$ et que $CE = AD$.
5) a) Montrer que les droites (QD) et (AB) sont perpendiculaires.

   b) En déduire que les points Q, E et Dsont alignés.

Exercice 3 : (5 pts)

Soit g la fonction définie par $g(x) = 2\sqrt{x^2 - 4x}$. On note C_g sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) Montrer que g est définie sur $]-\infty, 0] \cup [4, +\infty[$.
2) Montrer que la droite $\Delta: x = 2$ est un axe de symétrie de C_g
3) Montrer que C_g admet au point d'abscisse 4 une demi-tangente verticale.
4) Montrer que les droites D et D' d'équations respectives $y = 2x - 4$ et $y = -2x + 4$ sont des asymptotes obliques à C_g respectivement en $+\infty$ et en $-\infty$
5) Calculer $g'(x)$ puis dresser le tableau de variation de g.

6) Tracer D , D' et C_g

7) Soit la fonction f définie par $f(x) = g(|x| + 4)$

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est paire.

b) Expliquer comment peut-on déduire C_f à partir de C_g . Tracer C_f dans le même repère $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Exercice 4 : (6 pts)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les points $A(2)$, $B(1 + i\sqrt{3})$, $C(-2i)$ et $D(-\sqrt{2} + i\sqrt{2})$

1) a) Montrer que les points A, B, C et D appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2

b) Ecrire sous forme trigonométrique les nombres Z_B , Z_C et Z_D.

c) Construire alors les points A, B, C et D.

2) Soit $U = Z_D \times \overline{Z_B}$.

a) Déterminer le module et un argument de U.

b) Ecrire U sous forme cartésienne.

c) En déduire la valeur exacte de $\cos(\frac{5\pi}{12})$.

3) Soit le point E d'affixe $Z_E = Z_B + Z_D$

a) Montrer que $OBED$ est un losange.

b) En déduire un argument de E.

4) Déterminer les ensembles suivants

$$\Delta = \left\{M(Z); |\bar{Z} - 2i| = \left|Z - 1 - i\sqrt{3}\right|\right\} ; \ \Gamma = \{M(Z); |iZ - 2| = 2\}$$

Bon travail.