L.S MATEUR

A . S 2015-2016

Classe : 4Tech 2

MR : AMRI

Devoir de contrôle N°1

Durée : 2h Le 11-11-2015

EXERCICE 1 : (8 points)

Le plan complexe P étant muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On note A le point d'affixe 1 et B le point d'affixe 1−2i.

À tout nombre complexe z≠1 on associe : $z' = \frac{z-1+2i}{z-1}$

1) Déterminer l'ensemble E des points M(z) tels que : z' soit réel.

2) a) Montrer que pour tout nombre complexe z≠1, on a : $(z'-1)(z-1)=2i$

b) En déduire que pour tout point M distinct de A, on a : AM×AM'=2

c) Montrer que si M appartient au cercle (C) de centre A et passant par O, alors M' appartient à un cercle (C') que l'on précisera.

3) a) Montrer que pour tout point M distinct de A, on a :

$$(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) + (\vec{u}, \overrightarrow{AM'}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

b) En déduire que si M appartient à la perpendiculaire à $(O, \vec{u})$ passant par A, alors M' appartient à une droite que l'on précisera.

4) On pose $z = 2e^{i2\theta} + 1$; $\theta \in [-\pi, \pi]$

a) Montrer que $z' = 2\cos(\theta - \frac{\pi}{4})e^{i(\frac{\pi}{4}-\theta)}$

b) En déduire les valeurs de θ pour lesquelles le point M' appartient à l'axe des abscisses .

EXERCICE2 : (6points)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 + x^2\sin(\frac{\pi}{x^2}) \text{ si } x \leq -1 \\ -3 + \frac{x+1}{\sqrt{2+x}-1} \text{ si } x \succ -1 \end{cases}$

1) a) Montrer que f est continue en -1

   b) Démontrer que f est continue sur IR

2) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2\sin(\frac{\pi}{x^2}) = \pi$

   b) En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

3) a) Montrer que f(x) = 0 admet au moins une solution α dans $[-2,-1]$

   b) Montrer que $\sin(\frac{\pi}{\alpha^2}) = \frac{2}{\alpha^2} - 1$

<u>EXERCICE3 :</u>(6points)

Le tableau ci-dessous représente les variations d'une fonction définie et continue sur IR\ {0}

x	$-\infty$		-3		0		2		$+\infty$
f(x)	2	↘	-3	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-3	↗	$+\infty$

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on suppose que Δ :y=x+1 est une asymptote oblique à Cf au voisinage de $+\infty$ et (T) ; y=2x est la tangente à Cf au point A(1,-2)

1) Déterminer en justifiant :

   $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2}{2-f(x)}$; $\lim\limits_{x\to1} \frac{f(x)+2}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x)-x)$

2) Soit g la fonction définie par g(x) = f(3+f(x))

   a) Déterminer l'ensemble de définition de g

   b) Calculer $\lim\limits_{x\to2} g(x)$

   c) La fonction g est-elle prolongeable par continuité en 2

3) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(\frac{1+\cos x}{\sqrt{1+x}})$

BON TRAVAIL