Année scolaire 2021 /2022	**Généralité sur les fonctions**	Mr A. WADDAY 3EME svt

Exercice 1

Soit la fonction f définie par $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$

1)

a) Donner D_f l'ensemble de définition de la fonction f

b) Etudier la parité de f

2)

a) Déterminer $f(x)^2 - 4$

b) Déduire que f est bornée sur son ensemble de définition

c) Déduire que 2 est un maximum de f sur son ensemble de définition

3)

a) Montrer que $f(a)$- $f(b)$ = $\frac{(a^2-b^2)(4-b^2-a^2)}{a\sqrt{4-a^2}+b\sqrt{4-b^2}}$

b) Déduire les variations de f sur chacun des intervalles **[0,** $\sqrt{2}$ **]** et sur $[\sqrt{2}, 2]$

c) Dresser le tableau de variation de f

4)

a) On donne ci-dessous l courbe représentative de C_f incomplète de la fonction f. compléter C_f

b) Déduire à partir de C_f la courbe de la fonction **h** définie par :

$h(x) = |f(x-1)| + 1$

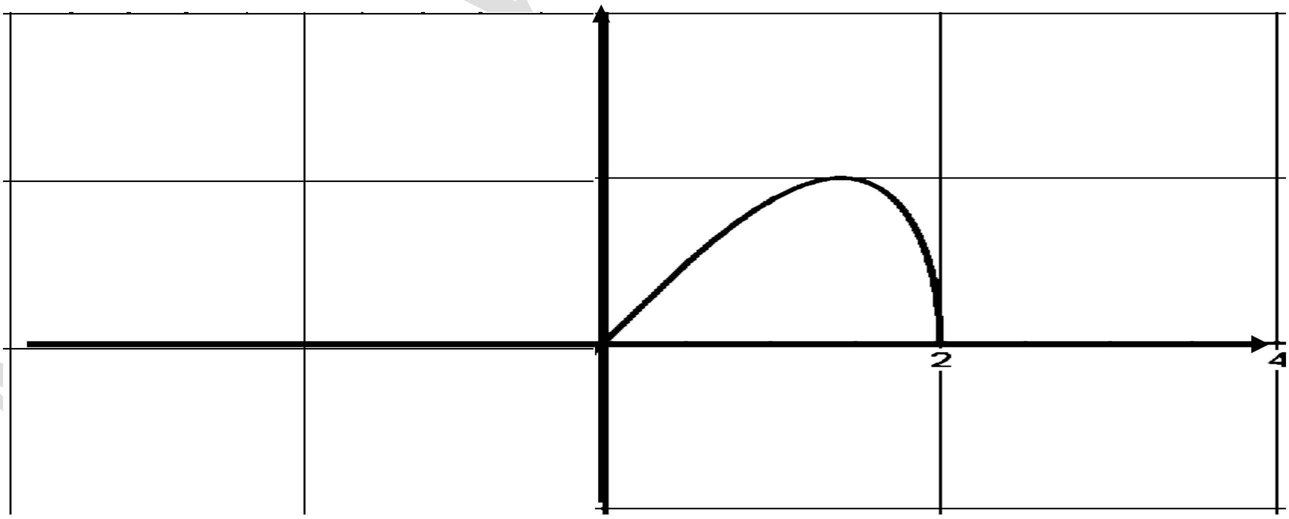
c) Déterminer graphiquement les éléments de symétries de chacune des fonctions h et K

5) Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{1}{f(x)}$

a) Déterminer D_g l'ensemble de définition de la fonction f

b) Montrer que g est impaire

c) Etudier les variations de g sur D_g sur **]0,** $\sqrt{2}$ **]** et sur $[\sqrt{2}, 2[$



Exercice 2

Soit f la fonction définit par $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}$

1)

a) Donner D_f l'ensemble de définition de la fonction f

b) Etudier la parité de f

2)

a) Montrer que pour tout x non nul $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+1}}$

b) Déduire que f est bornée sur $\boldsymbol{D_f}$

c) Déterminer le sens de variation de f sur] **-∞ ,0[**

3)

Soit g une fonction définit par $\boldsymbol{g(x) = \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+1}-2}{x}}$

a) Montrer que pour tout x > 0 $\boldsymbol{g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} + \frac{2}{\sqrt{2x+1}+1}}$

b) Montrer que g est décroissante sur] **-∞ ,0[**

c) Déduire que pour tout x > 0 $\boldsymbol{\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+1} < \frac{3}{2}x}$

Exercice 3

Soit la fonction f définie par $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2-4x}{x^2-4x+6}}$

1)

a) Déterminer $\boldsymbol{D_f}$ l'ensemble de définition de la fonction f

b) Montrer que la droite d'équation $\boldsymbol{x = 2}$ est un axe de symétrie à $\boldsymbol{C_f}$

c) Vérifier que $\boldsymbol{f(x) = \frac{(x-2)^2-4}{(x-2)^2+2}}$

d) Déduire que pour tout x de $\boldsymbol{D_f}$ $\quad \boldsymbol{-2 \le f(x) \le 1}$

e) 1 est il un maximum à $\boldsymbol{C_f}$, -2 est-il un minimum à $\boldsymbol{C_f}$

2)

Soient g et h les fonctions définit par $\boldsymbol{g(x) = \frac{x}{x+6}}$ **et** $\boldsymbol{h(x) = x^2 - 4x}$

a) Vérifier que $\boldsymbol{g(x) = 1 - \frac{6}{x+6}}$ **et** $\boldsymbol{h(x) = (x-2)^2 - 4}$

b) Etudier les variations de g sur R \ {-6} et dresser son tableau de variation

c) Etudier les variations de h sur R et dresser son tableau de variation

3)

a) Vérifier que $\boldsymbol{f(x) = g(h(x))}$

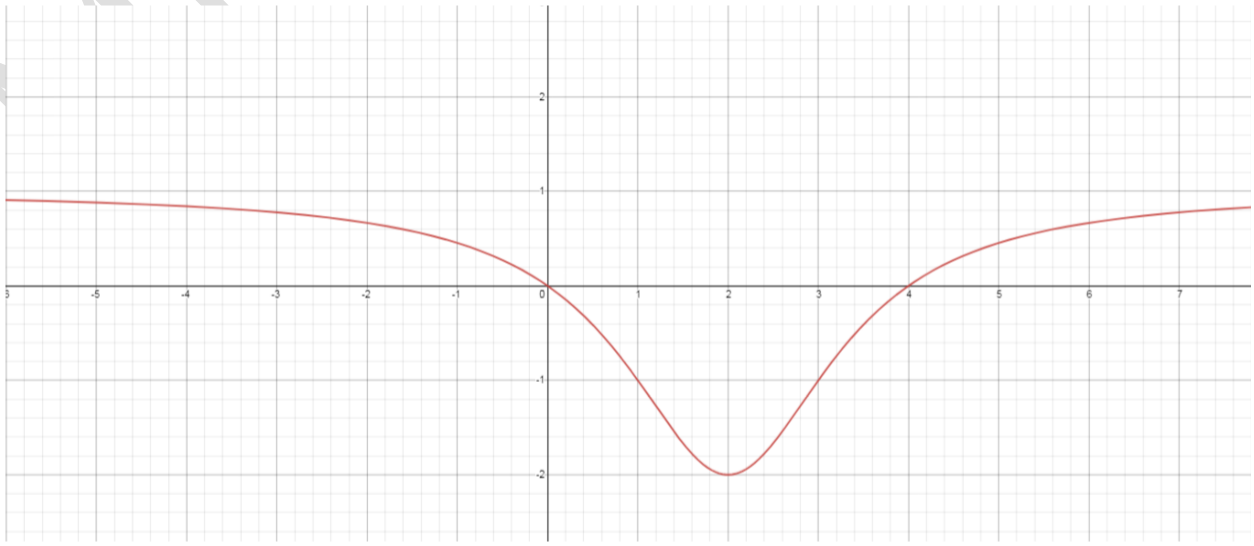
b) Déduire les variations de f sur chacun des intervalles] **-∞ ,2] et [2 ; +∞[**

4)

On donne ci-dessous la courbe $\boldsymbol{C_f}$ de la fonction f et soit $\boldsymbol{h(x) = |f(|x|)|}$

a) Montrer que h est paire

b) Tracer alors $\boldsymbol{C_h}$



Exercice 4

Soit f la fonction définit par $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 6} + 1$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f

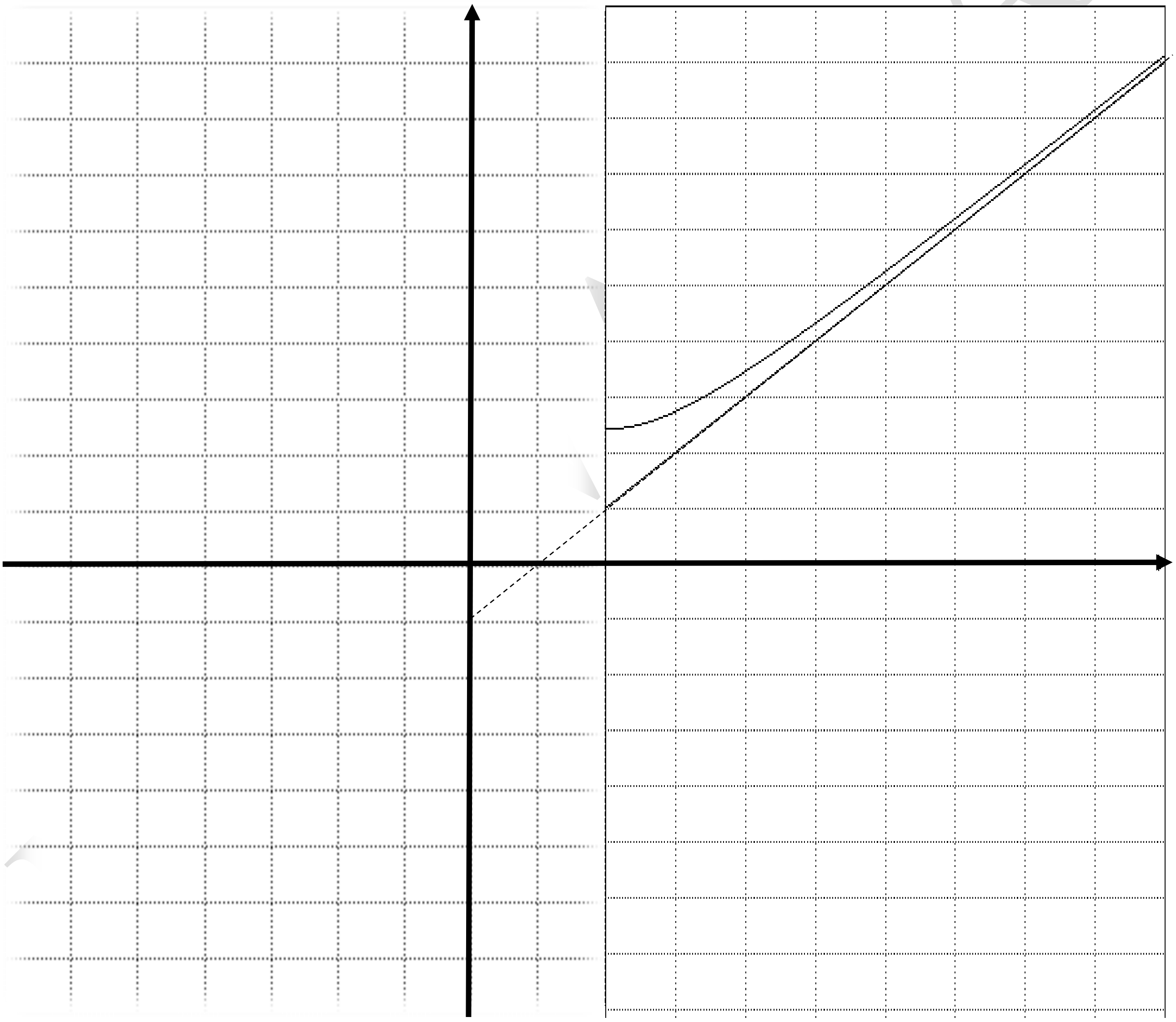
- **a)** Vérifier que pour tout x de D_f $f(x) = \sqrt{(x-2)^2 + 2} + 1$
- **b)** Déduire que f est minorée sur D_f
- **c)** f admet-elle un minimum sur D_f

2)

- **a)** Montrer que la droite d'équation $x = 2$ est un axe de symétrie à C_f
- **b)** Etudier les variation de f sur **[2 ; +∞[**
- **c)** Dresser alors le tableau de variation de f

3)

- **a)** Montrer que pour tout x **[2 ; +∞[** $f(x)$ **≥ x - 1**
- **b)** Soit la droite **D** d'équation $y = x - 1$ Etudier la position relative de C_f et **D** sur **[2 ; +∞[**



- **c)** Discuter suivant les valeurs de m le nombre de solution de l'équation $f(x) = m$

Exercice 5

Soit f la fonction définit par $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

1)

a) Donner D_f l'ensemble de définition de f

b) Etudier la parité de f

2)

a) Montrer que pour tout a et b de D_f $f(a) - f(b) = \frac{(a-b)(a+b)}{\sqrt{a^2-1}+\sqrt{b^2-1}}$

b) Déduire le sens de variation de f sur chacun des intervalles] **-∞, -1[et]1 ; +∞[**

c) Dresser le tableau de variation de f

3)

Soit Δ la droite d'équation $y = x$

a) Montrer que pour tout x $f(x) - x = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}$

b) Déduire la position relative de C_f et Δ sur]1 ; +∞[

c) Tracer dans la figure ci-dessous Δ et C_f

Soit g la fonction définit par $g(x) = \sqrt{x^2+1}$ et soit h la restriction de f sur **]1 ; +∞[**

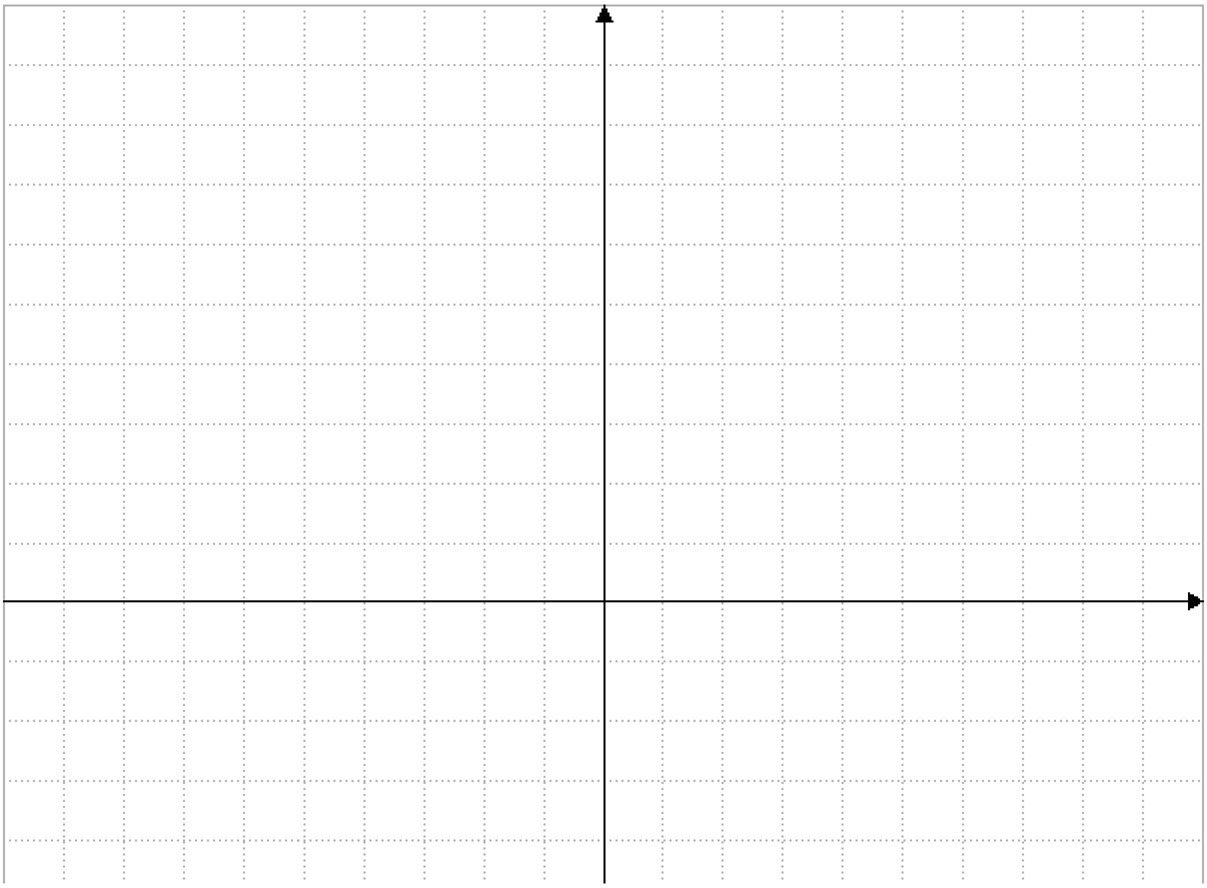
4)

a) Vérifier que $g(h(x)) = x$

b) Déduire alors que si **M (a, b)** $\in$ C_h **alors M' (b , a)** $\in$ C_g

c) Tracer alors C_g

d) Déterminer graphiquement D_g l'ensemble de définition de g



Exercice 6

Soit f la fonction définit par $f(x) = \frac{x^2-4}{|x|-2}$

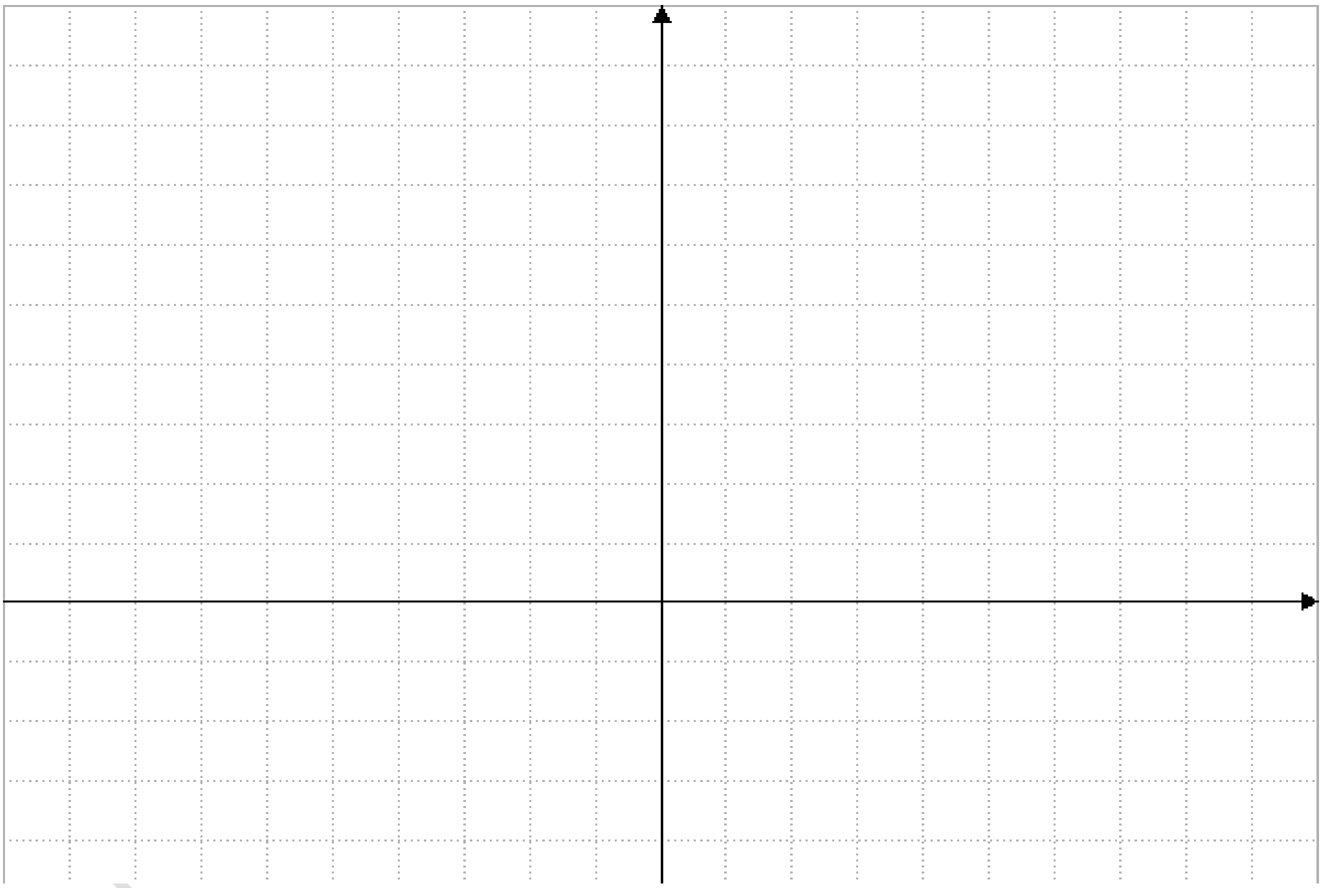
1)
   - **a)** Déterminer D_f l'ensemble de définition de f
   - **b)** Etudier la parité de f
   - **c)** Montrer que pour tout x de D_f $\quad f(x) = |x| + 2$
   - **d)** Déduire que f est affine par intervalle
   - **e)** Tracer C_f

2) Discuter suivant m le nombre de solution de l'équation $f(x) = m$

3)

Soit g la fonction définit par $g(x) = |f(x+2)| - 3$

- **a)** Tracer sur le même repère C_g



Exercice 7

On se propose dans cet exercice de déterminer graphiquement le nombres de solutions de l'équation $E : x^3 - x^2 + x - 2 = 0$

Soit f et g les fonctions définies par $f(x) = \frac{x}{x-1}$ et $g(x) = x^2 + 2$

1)

a) Donner les ensembles de définitions des fonctions f et g

b) Vérifier que 1 n'est pas une solution de E

c) Montrer que **α** est solution de E ⇔ $f(\boldsymbol{\alpha})$ **=** $g(\boldsymbol{\alpha})$

d) Montrer que g est paire et que **I (1, 1)** est un centre de symétrie à $\boldsymbol{C_f}$

2)

Dans la figure ci-dessous on a représenté $\boldsymbol{C_f}$ **et** $\boldsymbol{C_g}$ courbes représentatives de f et g

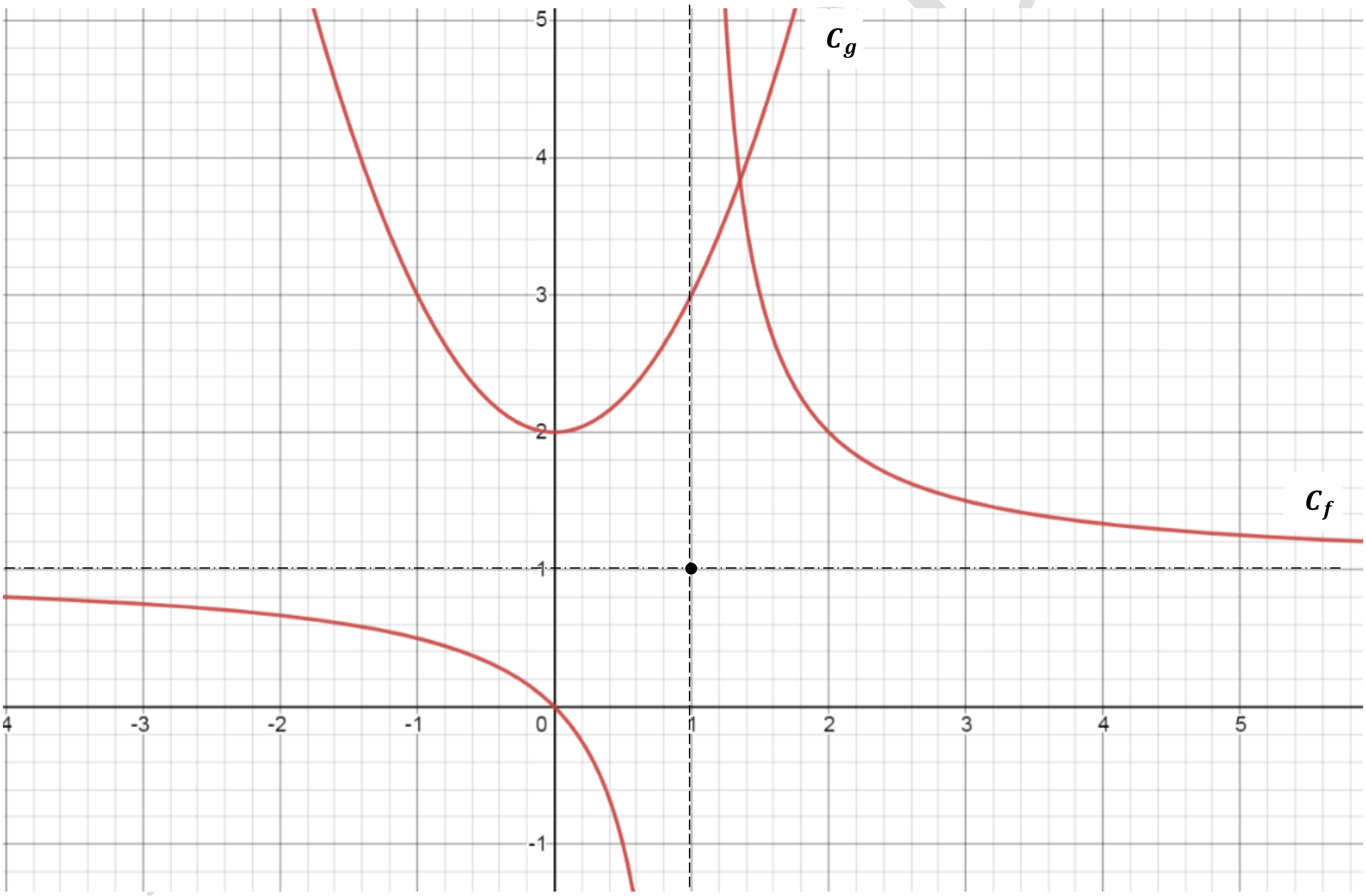
a) Montrer que l'équation **E** admet une unique solution **α** et déterminer un encadrement à 10^{-1} près de α

b) Résoudre graphiquement $\boldsymbol{g(x) \geq f(x)}$

3) Soit h la fonction définit sur R \ {1} par $\boldsymbol{h(x) = g(x) - f(x)}$

a) Montrer que pour tout x ≠1 $\boldsymbol{(x-1) * h(x) = x^3 - x^2 + x - 2}$

b) Résoudre alors $\boldsymbol{x^3 - x^2 + x - 2 \geq 0}$



4) Soit k la fonction définie par $\mathbf{k}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(|\boldsymbol{x}|)$

a) Déterminer $\boldsymbol{D_k}$ l'ensemble de définition de k

b) Montrer que k est paire

c) Tracer dans la même figure $\boldsymbol{C_k}$ courbe représentative de k

d) Déduire l'ensemble de solution de l'équation $|\boldsymbol{x}|^3 - |\boldsymbol{x}|^2 + |\boldsymbol{x}| - 2 = 0$

Exercice 8

Soit f la fonction définit sur IR par $\boldsymbol{f(x)} = \sqrt{\boldsymbol{x^2-1}}$

1)

a) Déterminer $\boldsymbol{D_f}$ l'ensemble de définition de f

b) Etudier la parité de f

2)

Soit h la restriction de f sur **[1 ; +∞[** et k la fonction définit tel que $\boldsymbol{f(k(x)) = x}$

a) Montrer que $K(\boldsymbol{x}) = \sqrt{\boldsymbol{x^2+1}}$

b) Déterminer l'ensemble de définition de k

c) Montrer que si N(a, b) ∈ $\boldsymbol{C_k}$ ⇔ N'(b, a) ∈ $\boldsymbol{C_f}$

d) Tracer alors $\boldsymbol{C_k}$

3) Soit M et M'deux variables de coordonnées M_n (n , h(n)) et M'_n (n, k(n)) avec n∈ $\mathbb{N}^*$

a) Exprimer la distance $\boldsymbol{M_nM_n'}$ en fonction de n

b) Placer les segments $\boldsymbol{[M_1M_1']}$, $\boldsymbol{[M_2M_2']}$ et $\boldsymbol{[M_3M_3']}$

c) Que peut-on dire de cette distance si n augmente de valeur positive