L -T Mateur	**Séries d'Exercices**	**Classe : 4M**
Prof : M[r] Amri	**(Déplacements et Antidéplacements)**	**Année Scolaire :2020-2021**

Exercice n° 1

On considère un triangle équilatéral direct ABC, On appelle Γ le cercle circonscrit à ABC la médiatrice du segment $[BC]$ coupe Γ en A et D On appelle A' le point d'intersection des droites (BD) et (AC)

1) Montrer que $A' = S_c(A)$

2) Soit $f = S_{(BD)} \circ S_{(DC)}$ et $g = S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$ .Caractériser f et g

3) Soit $E = S_{(AC)}(B)$.Et on pose $h = S_{(AC)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(BD)}$

a- Déterminer $h(B)$

b- Montrer que h est une symétrie glissante dont - on précisera l'axe et le vecteur

Exercice n° 2

Dans le plan orienté ,On considère un triangle ABC rectangle en B et tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.On désigne par $\theta = A * C$ et $J = B * C$

1) Montrer qu'il existe un unique déplacement g tel que
$g(A) = \theta$ et $g(B) = C$

2) a- Montrer que f est une rotation puis construire son centre D

b- donner la nature de $AB\theta D$

3) On désigne par $R_C = r\left(c\ ; \frac{\pi}{3}\right)$ et $R_B = r\left(B\ ; \frac{\pi}{3}\right)$ et $T = T_{\overrightarrow{BC}}$

On pose $f = R_C \circ T \circ R_B$

a- Déterminer $f(B)$

b- En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f

4) Soit $g = t_{\overrightarrow{AB}} \circ S_\theta$

a- Caractériser g

b- On pose $M' = t_{\overrightarrow{AB}}(M)$ et $M'' = S_\theta(M)$ où M est un point qlq du plan. Montrer que $J = M * M'$

c-Déduire l'ensemble des points M du plan tel que $M'M'' = AB$

5) On désigne par $I = \theta * A$ et $K = A * B$

Soit φ l'antidéplacement tels que : $\varphi(B) = A$ et $\varphi(A) = \theta$

a- Montrer que φ est une symétrie glissante. Puis déterminer ses éléments caractéristiques

b- Montrer que $\varphi(\theta) = D$

c- Soit $E = \varphi(D)$ .Montrer que E et B sont symétriques par rapport au point θ

Exercice n° 3

ABC est un triangle direct .On désigne par I , J et K les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$. On construit extérieurement à ce triangle les triangles ABM et CAN rectangles et isocèles en M et N

1) a- Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que $f(I) = J$ et $f(M) = K$

b- Déterminer l'angle de f

c- Montrer que $f(K) = N$

d- Déduire que le centre O de f est le milieu de $[MN]$

2) On considère les rotations r_1 et r_2 d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et de centre respectifs M et N . On pose $g = r_1 \circ r_2 \circ S_\Delta$ où $\Delta = méd[MK]$

a- Caractériser l'application $r_1 \circ r_2$

b- Montrer que g est une symétrie glissante

c - Trouver la forme réduite de g

Exercice n° 4

$ABCD$ est un carré direct $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$, $\Delta = méd[BC]$

Soit f une isométrie tel que $f \neq S_\Delta$ et telle q $f(B) = C$ et $f(D) = A$

1) a- Montrer que le point $\theta = B * D$ est invariant par f et que c'est l'unique point du plan invariant par f

b- En Déduire la nature et les caractéristiques de f

2) Soit $g = f \circ S_\Delta$ et $\varphi = S_\Delta \circ f$

a- Chercher $g(A)$ et $g(C)$ en déduire que $g = S_{(AC)}$

b- Montrer que $\varphi = S_{(BD)}$

c- En déduire la nature de $g \circ \varphi$

Exercice n° 5

Soit ABC est un triangle rectangle en A tel que $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

On désigne par O le milieu du segment $[BC]$

1) Montrer que OCA est équilatéral

2) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui envoie O sur A et B sur C

b) Montrer que f est une rotation . Construire son centre I

c) En calculant $\left(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IO}\right)$ et $\left(\overrightarrow{IO}, \overrightarrow{IA}\right)$. Montrer que $I \in [AB]$

d) Calculer alors $\frac{IA}{IC}$ .En déduire que I est le barycentre des points pondérés $(A,2)$ et $(B,1)$

3) Soit r la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $f \circ r$

b) Soit $C' = f(C)$. Montrer que O , I et C' sont alignés.

4) a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement g tel que $g(O) = A$ et $g(B) = C$

b) Montrer que g est une symétrie glissante dont - on précisera l'axe et le vecteur

c) Montrer que $g(C) = C'$

5) Soit $h = t_{\overrightarrow{BC}} \circ S_{(AB)}$ .Donner la nature et les éléments caractéristiques de h .

Exercice n° 6

On considère dans le plan orienté un rectangle $ABCD$ de centre O tel que $AB = 2BC$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ .On désigne par I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$

1) Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que $f(A) = C$ et $f(I) = J$ .Caractériser f

2) Soit $g = R_{\left(I\ ,\frac{\pi}{2}\right)} \circ f$

a) Montrer que g est une rotation .On précisera l'angle

b) Déterminer $g(A)$

c)Déduire une construction du point Ω centre de g

3) Soit h l'anti déplacement tel que $h\ (A) = C \quad et\ h\ (I) = J$

a) Montrer que h est une symétrie glissante

b) Montrer que $h\ (B) = D$

c) On pose $h(D) = D'$. Montrer que $\left(\overrightarrow{CD}\ ,\overrightarrow{CD'}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \quad et\ AD = CD'$

d) en déduire que D' est le symétrie de B par rapport à C

e) déduire la forme réduite de h

4) a) construire le point $C' = h(C)$

b) le cercle de diamètre $[AB]$ recoupe $[AC]$ en E

le cercle de diamètre $[CD]$ recoupe $[CC']$ en E' .Soit $F' = S_{(IJ)}(E')$. Montrer que $h(E) = E'$ et que $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{IJ}$

Exercice n° 7

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct$\left(o\ ,\vec{u}\ ,\vec{v}\right)$ .on donne le point A d'affixe 1

Soit l'application f de P dans P qui à tout $M(Z)$ associe $M'(Z')$

Tel que $Z' = \frac{1+i}{\sqrt{2}}Z + 1 - \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

1) Déterminer la nature de f et préciser ces éléments caractéristiques

2) Soit $M_0(2)$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ M_{n+1} = f(M_n)$ .On désigne par z_n l'affixe de de M_n et par Z_n l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AM_n}$

a- Montrer que $Z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$

b- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}\ ; Z_n = e^{in\frac{\pi}{4}}$

c- En déduire l'ensemble des valeurs de n pour les quelles les points $A\ , M_0\ \ et\ M_n$ sont alignés

Exercice n° 8

Dans le plan orienté, On considère un losange $ABCD$

Soit l'application f du plan dans lui même définie par :

$$f(A) = B \quad ; \quad f(B) = D \quad et \quad f(D) = C$$

Le plan est rapporté à un R.O.N $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$

1) Vérifier que dans ce repère $Z_D = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $Z_C = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$

2) on admet que l'expression complexe de f dans $\mathbb{C}$ est

$f(M(Z)) = M'(Z') \ / \ Z' = a\overline{Z} + b$

a-En utilisant $f(A) = B$ et $f(B) = D$. Montrer que $Z' = e^{i\frac{2\pi}{3}}\overline{Z} + 1$

b- Montrer que $BM' = AM$ en déduire que f est isométrie du plan.

c- Déterminer l'ensemble des points invariants par f puis déterminer la nature de f

3) Soit l'antidéplacement g du plan qui au point $M(Z)$ associé le point $M'(Z')$ /

$Z' = e^{i\frac{2\pi}{3}}\overline{Z} + 1 - e^{i\frac{2\pi}{3}}$ .Déterminer $g(B)$ et $g(C)$ et en déduire la nature de g

4) Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$,écrire l'expression complexe de t puis celle de $g \circ t$ et vérifier que f = $g \circ t$

5) Déterminer l'affixe du point $F = f(E)$ et montrer que B, D et F sont alignés et que $(BC) \perp (CF)$

Exercice n° 9 (bac 2012)

Soit $a \succ 0$

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 - (1+i)\,aZ + ia^2 = 0$

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(o, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On désigne par A et B les points d'affixes respectifs a et ia .

a- Quelle est la nature du triangle OAB ?

b- Déterminer l'affixe du point C tel que $OACB$ soit un carré

3) Soit P et Q tels que OAP et AQC sont équilatéraux de sens direct.

a- Montrer que $Z_p = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a$

b-Calculer l'affixe de Q

c- Montrer que B, P et Q sont alignés