Arithmétique

4ème S-I

Exercice 1

On admet le critère de divisibilité par 77 suivant :
Pour savoir si un entier naturel n est divisible par 77, on sépare le chiffre des unités de n des autres chiffres et on effectue la différence entre le nombre formé par les autres chiffres et le double du chiffre des unités. L'entier n est divisible par 77, si et seulement si, cette différence est divisible par 77.

1. A l'aide de ce critère, déterminer si 43614361 est divisible par 77. Même question avec 542542.
2. Dans la suite de l'exercice, on se propose de démontrer ce critère pour un nombre de trois chiffres.
   Soit n un entier naturel de trois chiffres dont l'écriture décimale est $n=abc$ avec $a\neq 0$.
   a. Montrer que $n\equiv 2a+3b+c[7]$.
   b. On appelle m l'entier égal à la différence décrite dans le critère. Montrer que $m\equiv 3a+b-2c[7]$.
   c. En déduire que $n-3m\equiv 0[7]$ et $m+2n\equiv 0[7]m+2n\equiv 0[7]$.
   d. En déduire que $m\equiv 0[7]$ si et seulement si $n\equiv 0[7]$puis conclure.

Exercice 2

Soient a, b et n trois entiers avec n non nul.
1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel p non nul, si $a\equiv b[n]$ alors $a^p\equiv b^p[n]$.
2. Montrer que $41^{183}\equiv 6[7]$.
3. (a) Vérifier que $2^3\equiv 4^3[7]$.
3. (b) Soit p un entier naturel non nul, si $a^p\equiv b^p[n]$, a-t-on $a\equiv b[n]$?
4. (a) A-t-on $2^2\equiv 2^5[3]$.
4. (b) Soit p un entier non nul, si $a\equiv b[n]$, a-t-on $p^a\equiv p^b[n]$?

Exercice 3

On considère la suite numérique (u_n)(un) définie par $u_0=14$u0=14 et pour tout entier naturel nn, $u_{n+1}=5u_n-6$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
   Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de u_n?

2

a. Montrer que pour tout entier nn, $u_{n+2} \equiv u_n [4]$.
   En déduire que, pour tout entier naturel k, $u_{2k+1} \equiv 0 [4]$ et $u_{2k} \equiv 2 [4]$
b. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $2u_n = 5^{n+2} + 3$
c. Montrer que, pour tout entier naturel nn, $5^{n+2} \equiv 25 [100]$.
d. En déduire que, pour tout entier naturel nn, $2u_n \equiv 28 [100] 2un \equiv 28 [100]$.
   Déterminer les deux derniers chiffres dans l'écriture décimale de u_n.