Mathématiques

4ème S-I

Exercice N°1

Soit la suite $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + \frac{2}{U_n} \end{cases}$

1- Montrer que pour tout entier naturel n $U_n>0$
2- a-Monter que $U_{n+1}^2 - U_n^2 > 4$
   b-Déduire que $U_n > 2\sqrt{n}$
   c-Déterminer alors la limite de la suite U_n
3- Soit la suite V_n définie sur $\mathbb{N}^*$par $V_n = U_{n+1}^2 - U_n^2$
   a- Monter que pour tout n $\in \mathbb{N}^* V_n \leq 4 + \frac{1}{n}$
   b- Déterminer alors la limite de V_n
4- a-Montrer que que pour tout n$\geq$ 1 ; $\frac{1}{2n} \leq \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$
   b-Déduire que $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} \leq 2\sqrt{n}$
5- Soit la suite S définie sur $\mathbb{N}^* S_n = \sum_{k=1}^{k=n} V_k$
   a-Monter que $S_n \leq 4n + 2\sqrt{n}$
   b-Calculer alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{{U_n}^2}{n}$

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ *par*

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 - 2x} + x \; si \; x \leq 0 \\ f(x) = \dfrac{\sqrt{x}\sin(\frac{\pi}{x})}{x-1} \; si \; x \in]0,+\infty[\setminus \{1\} \end{cases}$$

1-a-Montrer que pour tout réel de $]0,1[\; \frac{\sqrt{x}}{x-1} \leq f(x) \leq -\frac{\sqrt{x}}{x-1}$

b-Monter que f(x) continue en 0

c-Déterminer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\, f(x)$

2-On suppose que g(x)=$\frac{\pi(x-1)}{x}$ $et\; h(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ $et\; k(x) = \frac{\pi}{\sqrt{x}}$

a-Montrer que pour tout x $\in]0,+\infty[\setminus \{1\}$ f(x)=k(x).(hog)(x)

b-En déduire que f(x) admet un prolongement par continuité en 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

1. (a) Vérifier que $(1-5i)^2 = -24-10i$
   (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + (3-i)z + 8 + i = 0$
2. Soient A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = -2+3i$, $z_B = -1-2i$ et $z_C = 4-i$
   (a) Placer les points $A; B$ et C
   (b) Montrer que le triangle ABC est isocèle et rectangle .
   (c) Déterminer l'affixe du point D pour que $ABCD$ soit un carré .
3. Soit (Γ) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-1-i| = \sqrt{13}$.
   (a) Déterminer l'ensemble (Γ) .
   (b) Que représente l'ensemble (Γ) pour le carré $ABCD$? construire (Γ) .