Khlifi maher

97079835

Série d'exercice n°2 — les matrices

2020/2021 — 4^{eme} ECO

Exercice n° 1

On considère les matrices suivantes :

$$A = (1\ ;\ 3\ ;\ 4)\ ;\quad B = (1\ ;\ 0)\ ;\quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\ ;\ D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}\ ;\ E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\ ;\quad M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}\ ;\ N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}\ ;\ L = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

1) Compléter le tableau suivant

matrice	A	B	C	D	E	F	M
Ordre							

2) Peut-on calculer $A + B$?, $D + E$?, $M + N$? , $F + L$?
3) Peut-on calculer AB ?, DE?, MN? , FL? , AC? si oui déterminer son ordre.
4) Calculer $F + 2L$; $M + N$; $N - 2M$, $2M - I_3$.
5) Calculer AC , BD ; DE , MN , NC .
6) Calculer det (M) ; det (N) ; det (F) ; det(L).
7) Déterminer les matrices inverse de F et L .

Exercice n° 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

1) Calculer le déterminant de la matrice$A$. En déduire que A est inversible.
2) Déterminer la matrice inverse de A.
3) On considère le système (S) suivant : $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ -x + 3y = 1 \end{cases}$
   a) Donner l'écriture matricielle de (S).
   b) Résoudre le système (S).

Exercice n° 3

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$,

1) a-Montrer que A est inversible

b- Calculer la matrice $M = 2I_3 - A$ ou $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c- Calculer AxM et en déduire la matrice inverse de A.

2) Soit le système (S) : $\begin{cases} 2x + 2y + z = 5 \\ -x - y - z = -2 \\ x + 2y + 2z = 3 \end{cases}$

a- Donner l'écriture matricielle de (S).
b- Résoudre alors le système (S).

Exercice n° 4

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & a \end{pmatrix}$ ou a désigne un nombre réel.

1) Déterminer a pour que $A\text{x}B = 11I_2$ ou I_2désigne la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
2) On considère le système (S) : $\begin{cases} x - 2y = -5 \\ 4x + 3y = 13 \end{cases}$
   a- Donner l'écriture matricielle de (S)
   b- Résoudre le système (S)
3) On con sidère le système (S') : $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 1 \\ 3x + 2y - z = 7 \end{cases}$

   Montrer que le système (S') est équivalent au système (S'') : $\begin{cases} z = 6 - x - y \\ x - 2y = -5 \\ 4x + 3y = 13 \end{cases}$
4) En déduire l'ensemble des solutions du système (S')

Exercice n° 5

1) On considère le système (S)$\begin{cases} 5x + 7y + 9z = 235 \\ x + 2y + 3z = 65 \\ 2x + 2y + 3z = 80 \end{cases}$
   a- Déterminer la matrice M de (S)
   b- Démontrer que la matrice M est inversible et vérifier que sa matrice inverse est la matrice

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

   c- Résoudre alors le système (S).
2) Le tableau suivant indique les frais de fabrications en matière première, main d'œuvre et frais divers pour chaque unité des différents types de produits A, B et C.

Types de produit / Frais de fabrication	Unité de type A	Unité de type B	Unité de type C
Matière première en DT	100	140	60
Main d'œuvre en DT	80	80	60
Frais divers en DT	40	40	40

Les frais de tous les produits fabriqués en une journée sont les suivantes :

- Matière première : 235 DT
- Main d'œuvre : 65 DT
- Frais divers : 80 DT

  Déterminer le nombre de produits fabriqués en cette journée de chaque type A, B et C.

Exercice n° 6

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) Calculer le déterminant de la matrice A et en déduire qu'elle est inversible.
2) a- Montrer que $A.B + 2I = 0$ou 0 désigne la matrice nulle d'ordre 3

b- En déduire que $A^{-1} = -\frac{1}{2}B$ ou A^{-1}désigne la matrice inverse de A.

3) Soit, dans IR^3, le système (S) :: $\begin{cases} x + 2\,y + \ \ z = -2 \\ 2x + 3y + 2z = 4 \\ 3x + \ 4y + 5z \ = 8 \end{cases}$

   a- Donner l'écriture matricielle de (S)

   b- En déduire l'ensemble des solutions du système (S)

Exercice n° 7

On donne les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -7 & \frac{29}{2} \\ -\frac{5}{2} & 1 & -11 \\ 2 & -5 & 9 \end{pmatrix}$ et $C = A + B$

1) Déterminer la matrice C
2) a- Calculer le déterminant de la matrice A. En déduire que A est inversible.

   b- Justifier que C est la matrice inverse de A.

3) Soit dans IR^3 le système (S) : $\begin{cases} 2x + 2\,y - \ \ z + 4 = 0 \\ x + 6y + 4z - 8 = 0 \\ 2y \ + \ 2z - 6 \ = \ 0 \end{cases}$

   a- Le triplet $(-2,1,2)$ est-il solution de (S) ? Expliquer.

   b- Montrer que $(a\,, b, c)$ est une solution du système (S) si et seulement si $A.\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

   c- Résoudre alors le système (S).

Exercice n° 7

Une chaine hôtelière gère des hôtels, tous de même catégorie, dans les villes de Tabarka, Sousse et Zarzis.

Les prix (en dinars) en pension complète d'une journée et par personne, dépendent de la saison du séjour

et sont donnés dans le tableau suivant :

Villes / Période	Tabarka	Sousse	Zarzis
Haute saison	100	140	60
Moyenne saison	80	80	60
Basse saison	40	40	40

Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 100 & 140 & 60 \\ 80 & 80 & 60 \\ 40 & 40 & 40 \end{pmatrix}$

1) Vérifier que $P^{-1} = \frac{1}{80}\begin{pmatrix} -2 & 8 & -9 \\ 2 & -4 & 3 \\ 0 & -4 & 8 \end{pmatrix}$
2) Un client choisit d'effectuer un séjour de 14 jours dans les différents hôtels de cette chaine, composé
de la façon suivante :
Quatre jours à Tabarka, quatre jours à Sousse et six jours à Zarzis.
On associe à ce choix la matrice $M=\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$
   a- Calculer le produit $P\text{x}M$. En déduire le cout du séjour de ce client pour chacune des trois périodes.
   b- Ce client dispose d'un budget de 900 dinars. En quelle saison peut-il séjourner ?
3) Dans un spot publicitaire, la chaine hôtelière affirme qu'un séjour complet de 14 jours est possible aux prix de 1080 dinars en haute saison, 920 dinars en moyenne saison et 560 dinars en basse saison.
Comment ce séjour se compose-t-il ?

Exercice n° 8

On donne les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 9 & 3 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

1)a-Calculer AxB

b- En déduire la matrice inverse de A.

2)Un atelier de couture confectionne 400 pantalons, en trois modèles P_1, P_2 et P_3.

Il dispose d'un tissu de longueur 492 mètres (Ayant une largeur fixe) pour la couture de ces pantalons

avec un cout totale de 5680 dinars. La longueur du tissu et le cout de couture d'un pantalon de chaque modèle sont donnés dans le tableau suivant

Type de pantalon	P_1	P_2	P_3
Le cout de couture d'un pantalon (en dinars)	8	16	20
Longueur du tissu (en mètre)	1	1,2	1,6

On se propose de déterminer le nombre des pantalons coudés de chaque modèle.

a- Montrer que la situation se traduit par le système (S) : $\begin{cases} x + y + z = 400 \\ 2x + 4y + 5z = 1420 \\ 5x + 6y + 8z = 2460 \end{cases}$

b- Donner l'écriture matricielle de (S).
Déterminer alors le nombre des pantalons coudés de chaque modèle.

Exercice n° 9

On donne les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 4 \\ 4 & 2 & -2 \\ 7 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

1) a-Calculer le déterminant de A. En déduire que A est inversible.

b- Calculer AxB

c- En déduire la matrice inverse A^{-1} de A.

2) Les tarifs d'entrée au musée de Bardo sont :

- 12 dinars pour les visiteurs étrangers.
- 8 dinars pour les tunisiens de moins de 60 ans.
- 4 dinars pour les tunisiens âgés de plus de 60 ans.

Les renseignements suivants concernent la visite du musée pendant une journée.

- Le nombre total des visiteurs est de 300 personnes.
- Le nombre des visiteurs tunisiens âgés de plus de 60 ans est égale au total du nombres des visiteurs étrangers augmentés du triple de nombre des visiteurs tunisiens de moins de 60 ans.
- La recette de la journéeest de 2040 dinars.

a- Montrer que la situation se traduit par le système (S) : $\begin{cases} x + y + z = 300 \\ x + 3y - z = 0 \\ 3x + 2y + z = 510 \end{cases}$

b- Donner l'écriture matricielle de (S).

c- Déterminer alors le nombre des visiteurs étrangers, le nombre des visiteurs tunisiens de moins de 60 ans et le nombre des visiteurs tunisiens âgés de plus de 60 ans