PROF : M^r AFLI EZZEDDINE	DEVOIR DE SYNTHESE MATHEMATIQUES	NIVEAU : $4^{éme}$ sc Durée : 3 heures

EXERCICE N°1 (05 PTS)

L'espace est rapporté a un repère orthonormée (0 ; $\vec{I}$; $\vec{J}$; $\vec{K}$) . on considère les points

A(6 ; 0 ; 0) ; B (0 ; 6 ; 0) ; C (0 ; 0 ; 6) et D (-2 ; -2 ; -2)

1a) vérifier que les points A ; B et C déterminent un plan P

b) donner une équation cartésienne du plan P

2a) vérifier que la droite (OD) est perpendiculaire à P

b) donner une représentation paramétrique de la droite (OD)

3) soit H la projeté orthogonal du point O sur le plan P .

a) vérifier que H a pour coordonnes (2 , 2 , 2)

b) calculer : HA ; HB et HC et déduire que (OD) est l'axe du cercle circonscrit au triangle ABC

4) soit Q l'ensemble des points M (x , y , z) tel que : MC = MD

a) montrer que Q est le plan dont une équation cartésienne est : x + y + 4z – 6 = 0

b) montrer que (OD) coupe Q en un point w dont on précisera les coordonnés

4) soit S la sphère de centre w et de rayon $3\sqrt{3}$

a) écrire une équation cartésienne de S

b) vérifier que S passe par A , B ; C et D

c) quel est l'intersection de S et P

EXERCICE N°2 (05 PTS)

Le plan est rapporté a un repère orthonormé (O ; $\vec{U}$; $\vec{V}$)

On considère l'équation (E) : $z^2 + (1 - i\sqrt{3})Z - (1 + i\sqrt{3}) = 0$

1)a) vérifier que : $(\sqrt{3} + i)^2 = 2 + 2i\sqrt{3}$

b) résoudre dans Ç l'équation (E) . on note par Z_1 la solution dont la partie réel est positif et Z_2 l'autre solution

2) soit les nombres complexes $a = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$ et $b = \frac{i\sqrt{3}-1}{2}$

a) mettre a et b sous forme trigonométrique et représenter leurs points images A et B

b) vérifier que $Z_1 = a + b$ et $Z_2 = b - a$

c) montrer que $\frac{b}{a}$ est imaginaire pure . que peut –on conclure pour les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$

d) montrer que OAM_1B est un carré puis déduire une construction du point M_1 d'affixe Z_1

e) construire M_2 d'affixe Z_2

3) mettre sous forme trigonométrique Z_1 puis déduire les valeurs exactes de cos($\frac{5\pi}{12}$)et sin($\frac{5\pi}{12}$)

EXERCICE N°3 (07 PTS)

I) soit la fonction g définie sur] 0 ; + ∞ [par g(x) = x + 1 - xLn(x)

1a) montrer que g est dérivable sur] 0 ; + ∞ [et calculer g'(x)

b) dresser le tableau de variation de g

c) montrer que l'équation g(x) = 0 admet une unique solution α dans] 0 ; + ∞ [.

vérifier que 3< $\alpha < 4$

d) donner le signe de g(x) suivant les valeurs de x

3) soit la fonction h définie sur] 0 ; + ∞ [par h(x) = $\frac{1}{2}x^2$Ln(x)

a) déterminer h'(x)

b) vérifier que pour tout ∈] 0 ; + ∞ [g(x) = 1 + $\frac{3}{2}x$ - h'(x)

c) déduire la primitive de g qui s'annule en 1

II) soit la fonction f définie sur] 0 ; + ∞ [par f(x) = $\frac{Ln(x)}{x+1}$

1)déterminer : $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

2a) montrer que f est dérivable sur] 0 ; + ∞ [et que f'(x) = $\frac{g(x)}{x(x+1)^2}$

b) dresser le tableau de variation de f

3a) vérifier que f(α) = $\frac{1}{\alpha}$

b) écrire une équation de la tangente T à C_f en 1

4) tracer T et C_f

EXERCICE N°4 (03 PTS)

Soit (I_n) la suite définie par $I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}$ dx ; n ≥ 1

1) caculer I_1

2) vérifier que : 1 -I_n = $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}$ dx

3a) montrer que : 0 ≤ 1 -I_n ≤ $\frac{1}{n+1}$

b) déduire que la suite (I_n) converge et déterminer sa limite

bon travail