Probabilités sur un ensemble fini

1°. EXPÉRIENCE ALÉATOIRE

<u>Introduction</u> Lors du lancer d'une pièce de monnaie , on peut obtenir pile ou face .

Lors d'un tirage simultané de deux boules d'une urne contenant quatre boules b_1 , b_2 , b_3 et b_4 ,

le résultat obtenu est l'un parmi les cas suivants : $\{b_1,b_2\}$ $\{b_1,b_3\}$ $\{b_1,b_4\}$ $\{b_2,b_3\}$ $\{b_2,b_4\}$ $\{b_3,b_4\}$.

Le résultat pour chacune des deux expériences ci-dessus est alors soumis au hasard ,

il est donc **imprévisible** ; on dit que ces expériences sont **aléatoires**.

Définition Une expérience dont le résultat est soumis au hasard et est donc imprévisible est dite aléatoire

- Chaque résultat est appelé issue ou cas possible ou une éventualité .
- L'ensemble E des issues d'une expérience aléatoire est appelé univers .
- Le nombre n des éléments de E s'appelle le cardinal de E ; on note card E = n

<u>Exemple1</u> On lance trois fois de suite un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on s'intéresse au numéro porté par la face supérieure. Un cas possible est un triplet de chiffres où l'un de ces chiffres pouvait <u>se répéter autant de fois</u> que possible tels que (2,5,3) , (6,1,6) , (4,2,3) , (2,2,2) , (5,4,3) , …….; alors $\text{card}E = 6^3 = 216$

<u>Exemple2</u> Un sac contient 5 jetons j_1, j_2, j_3, j_4 et j_5 , on tire au hasard successivement et sans remise 4 jetons du sac Un cas possible est un quadruplet de jetons <u>ordonnés et distincts</u> donc tout issue est un <u>arrangement</u> de 4 éléments de l'ensemble des 5 jetons tels que (j_2, j_4, j_1) , (j_5, j_3, j_2) , (j_3, j_4, j_5),……… ; alors $\text{card}E = A_5^4 = \dfrac{5!}{(5-4)!} = 120$

<u>Exemple3</u> De combien de façons peut - on former des groupes de quatre élèves d'une classe de 28 élèves ?

Un groupe possible est une partie (ou sous- ensemble) de quatre personnes de l'ensemble des 28 élèves donc il s'agit d'une <u>combinaison</u> de 4 éléments de l'ensemble des 28 élèves , alors $\text{card}E = C_{28}^4 = \dfrac{28!}{4!(28-4)!} = 20475$

<u>**Théorème et définition**</u> Soit $E = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ un ensemble à n éléments et p un entier naturel non nul .

- Le nombre des p-uplets d'éléments de E est l'entier n^p.
- Le nombre des p-uplets d'éléments de E deux à deux distincts est l'entier $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$; $1 \le p \le n$
- Le nombre de parties de p éléments de E est l'entier $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$; $0 \le p \le n$.

types de tirage de p éléments d'un ensemble fini E contenant n éléments

Type de tirage	Successif avec remise	Successif sans remise	simultané
répétition	Un élément peut être tiré plus qu'une fois	Un élément n'est tiré qu'une seule fois	Un élément n'est tiré qu'une seule fois
ordre	L'ordre intervient	L'ordre intervient	L'ordre n'intervient pas
card E	n^p	A_n^p	C_n^p

Exemple

Une urne contient 5 boules rouges , 4 boules noires et 3 boules bleue indiscernables au toucher .

- Le nombre de tirage simultané de 3 boules de l'urne est : $N_1 = C_{12}^3 = 220$
- Le nombre de tirage simultané de 2 boules rouges et une boule noire est $N_1' = C_5^2 \times C_4^1 = 10 \times 4 = 40$
- Le nombre de tirage successif avec remise de 3 boules de l'urne est : $N_2 = 12^3 = 1728$
- Le nombre de tirage successif avec remise de 2 boules rouges et une boule noire est :
  $N_2' = 5^2 \times 4^1 \times C_3^1 = 25 \times 4 \times 3 = 300$
- Le nombre de tirage successif sans remise de 4 boules de l'urne est : $N_3 = A_{12}^4 = 11880$
- Le nombre de tirage successif sans remise de 5 boules : 2 rouges , 2 noires et une bleue est :
  $N_3' = A_5^2 \times A_4^2 \times A_3^1 \times C_5^2 \times C_3^2$

2°. PROBABILITÉ SUR UN ENSEMBLE FINI

Vocabulaire et langage probabiliste

Soit $E = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ l'univers d'une expérience aléatoire où a_i est l'un des n issues de cette expérience

- Une partie A de E est appelée évènement.
- L'évènement contraire de A est noté $\overline{A}$ et on a $A \cap \overline{A} = \varnothing$ et $A \cup \overline{A} = E$.
- $\{a_i\}$ est appelé évènement élémentaire.
- L'évènement E est appelé évènement certain.
- L'évènement impossible est noté $\varnothing$ (ne contient aucun issue) .
- Soit B et D deux évènements de E :

** L'évènement « B et D » est noté $B \cap D$, il est réalisé lorsque tous les deux sont réalisés .

Si $B \cap D = \varnothing$ dans ce cas B et D sont dits deux évènements incompatibles (ou disjoints).

** L'évènement « B ou D » est noté $B \cup D$, il est réalisé si l'un au moins est réalisé .

Définition Soit $E=\{a_1,a_2,.......,a_n\}$ l'univers fini d'une expérience aléatoire et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des évènements de E.

On appelle probabilité sur E, toute application $p:\mathcal{P}(E)\mapsto[0,1]$ vérifiant :

$p(E)=1$	$p(\varnothing)=0$	$p(A)=\sum_{a_i\in A}p(a_i)$

Remarque : $\sum_{a_i\in E}p(a_i)=1$

Vocabulaire : Le triplet (E , $\mathcal{P}(E)$, p) est appelé espace probabilisé fini .

Application

On lance un dé truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6 .

On note p_i la probabilité d'apparition de la face marqué i .

On donne $p_1=0.1$; $p_2=0.2$; $p_3=0.3$; $p_4=0.1$ et $p_5=0.15$

a/ Quelle est la probabilité de sortie de la face marquée 6 ?

b/ Déterminer la probabilité d'obtenir un nombre pair ?

Propriétés : Soit (E , $\mathcal{P}(E)$, p) un espace probabilisé fini et A et B deux évènements de E .

- $p(\overline{A})=1-p(A)$
- $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$
- Si $A\cap B=\varnothing$ alors $p(A\cup B)=p(A)+p(B)$
- Si $A_1, A_2,......., A_k$ sont des évènements deux à deux incompatibles , alors :

  $p(A_1\cup A_2\cup.....\cup A_k)=p(A_1)+p(A_2)+........+p(A_k)$

Exercice page 68

3°. EQUIPROBABILITÉ

Soit (E , $\mathcal{P}(E)$, p) un espace probabilisé fini ; $\text{card}E=n$ et $E=\{a_1,a_2,.......,a_n\}$.

Si tous les évènements élémentaires $\{a_i\}$ ont la même probabilité de réalisation , on dit qu'on est en présence d'une situation d'équiprobabilité et p est dite probabilité uniforme . On a alors :

• . $p(\{a_i\})=\dfrac{1}{\text{card}(E)}=\dfrac{1}{n}$	pour tout $i\in\{1,2,....,n\}$.
• $p(A)=\dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(E)}$	pour tout évènement A .

Remarque : En pratique, on peut connaître qu'il s'agit d'équiprobabilité dans des situations tels que :

- On tire au hasard ….
- …boules (ou jetons ou ….) indiscernables au toucher …
- Dé (ou pièce de monnaie ou ….) équilibré (parfait ou non truqué…)
- Fréquence du caractère dans l'ensemble de référence ou bien le pourcentage du caractère dans cet ensemble tel que pour le choix d'un individu dans un groupe et dans ce cas la probabilité est égale à la fréquence ou le pourcentage .

Application

On jette deux dés équilibrés de couleurs rouge et verte et dont les faces sont numérotés de 1 à 6

a/ Calculer la probabilité d'obtenir le même chiffre sur les deux dés .

b/ Calculer la probabilité d'obtenir deux chiffres distincts .

Dé R / Dé V	1	2	3	4	5	6
1	**(1,1)**	**(2,1)**	**(3,1)**	**(4,1)**	**(5,1)**	**(6,1)**
2	**(1,2)**	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
3	**(1,3)**	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
4	**(1,4)**	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
5	**(1,5)**	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
6	**(1,6)**	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)

Corrigé

L'univers E de l'expérience est comme suit :

$E = \{ (i , j) \text{ tels que } 1 \le i \le 6 \text{ et } 1 \le j \le 6 \}$ et card$E$ = 36

a/ l'évènement A « obtenir le même chiffre sur les deux dés » est tel que $A = \{ (i , i) ; \ 1 \le i \le 6 \}$ donc card$A$ = 6 et par suite

$$p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(E)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

b/ Il s'agit de l'évènement $\overline{A}$ et on a $p(\overline{A}) = 1 - p(A) = \frac{5}{6}$

Exercice : Un sac contient 13 jetons indiscernables au toucher : 3 noirs marqués A , B et C et 10 blancs numérotés de 1 à 10 . On tire simultanément et au hasard 5 jetons du sac .

Calculer la probabilité de chacun des évènements suivant :

R « Obtenir les trois jetons noirs parmi les 5 jetons extraits »

S « Obtenir le jeton marqué C parmi les 5 jetons extraits »

T « Obtenir au moins un jeton noir parmi les 5 jetons extraits »

Exercices N°1 & 4 page 78

4°. PROBABILITÉ CONDITIONNELLE

Activité Chaque élève d'une classe de 10 garçons et 20 filles choisit une seule option .

7 garçons et 15 filles font l'option allemand , les autres font l'option espagnol .

On choisit au hasard un élève de cette classe et on note les évènements suivant :

A « L'élève choisit fait l'option allemand »

, B « L'élève choisit est une fille »

E « L'élève choisit fait l'option allemand sachant que c'est une fille »

1°/ Calculer la probabilité de chacun des évènements A , B , $A \cap B$ et E .

2°/ Comparer p(E) et $\frac{p(A \cap B)}{p(B)}$; Conclure .

Théorème et définition

Soit (E , $\mathcal{P}$(E) , p) un espace probabilisé fini et B un évènement tel que p(B) ≠ 0 .

L'application $P_B : \mathcal{P}(E) \mapsto [0,1]$ définie par $P_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$ pour tout évènement A ,

est une probabilité sur E appelée probabilité B-conditionnelle .
Le réel $P_B(A)$ est noté $P(A/B)$ qu'on lit « probabilité de A sachant B »

Application

Un lycée a présenté 257 candidats au bac , dont 82 en section science expérimentale .

196 ont été admis à l'examen , parmi eux 61 de la section science expérimentale .

Un élève étant choisi au hasard parmi les candidats présentés par le lycée ; on note les évènements :

A « l'élève provient de la section science expérimentale » et B « l'élève a été admis à l'examen »

Calculer p (A) , p (B) et p (A∩B) ; En déduire p (A / B) et p (B / A)

Exercice

On dispose d'un dé cubique et homogène dont les faces sont numérotées : -1 , -1 , -1 , 0 ,

1 et 1 ; on le jette deux fois de suite et on note à chaque fois le numéro de la face supérieure .

1°/ Déterminer la probabilité de chacun des évènements :

A « Les deux numéros sont différents » et B « La somme des deux numéros est égale à 0 »

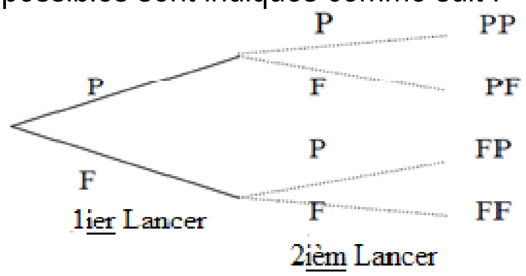
2°/ Calculer la probabilité d'avoir deux numéros différents sachant que leur somme est nulle .

Activité 2 page 71 & Exercice page 72

EVÈNEMENTS INDÉPENDANTS

Activité

On lance deux fois de suite une pièce de monnaie (non truquée) ; les cas possibles sont indiqués comme suit :



Si on note les évènements suivants :

A « Le résultat du premier lancer est pile »

B « Le résultat du second lancer est pile »

La probabilité d'obtenir deux fois pile est alors la probabilité de l'évènement $A\cap B$, soit $p(A\cap B)=1/4$

or $p(A)=1/2$ et $p(B)=1/2$, on remarque donc que :

$$p(A\cap B) = p(A).\ p(B)$$

On dit dans ce cas que A et B sont deux évènements indépendants c'est-à-dire la réalisation de l'un n'influence pas celle de l'autre .

Définition

Deux évènements A et B sont indépendants lorsque $p(A\cap B) = p(A).\ p(B)$.

Dans le cas où $p(B) \neq 0$ alors $p(A/B) = p(A)$.

Application

On écrit les entiers de 1 à 20 sur vingt cartons .

On tire au hasard un carton et on note les évènements :

A « Obtenir un nombre impair » et B « obtenir un multiple de 5 »

a/ Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

b/ Même question si on ajoute un carton numéroté 21 .

Activités 4 et 5 page 74

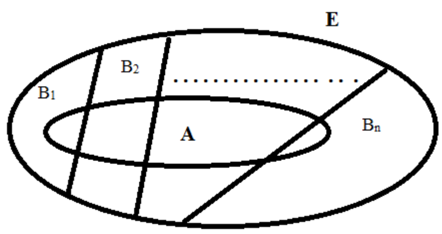
FORMULES DES PROBABILITÉS TOTALES

E l'univers fini d'une expérience aléatoire et $B_1, B_2, \ldots\ldots, B_n$ sont des évènements de E .

Définition

Les parties $B_1, B_2, \ldots\ldots, B_n$ forment une partition de E lorsqu'ils sont deux à deux disjoints et leurs réunion est E .

$$B_1 \cup B_2 \cup \ldots\ldots \cup B_n = E$$



Théorème

Soit (E , $\mathcal{P}$(E) , p) un espace probabilisé fini . $B_1, B_2, \ldots\ldots, B_n$ sont des évènements de probabilités non nulles , formant une partition de E . Alors pour tout évènement A on a :

$$p(A) = p(A\cap B_1) + p(A\cap B_2) + \ldots\ldots + p(A\cap B_n) = \sum_{i=1}^{i=n} p(A\cap B_i) = \sum_{i=1}^{i=n} p(B_i).p_{B_i}(A)$$

Exercice 5 page 78 & **Exercice N°4 Bac 2013 Contrôle**

Exercice Le quart d'une population a été vacciné contre une maladie contagieuse .

Au cours d'une épidémie , on constate qu'il y a parmi les malades un vacciné pour quatre non vaccinés et qu'il y a avait un malade sur douze parmi les vaccinés .

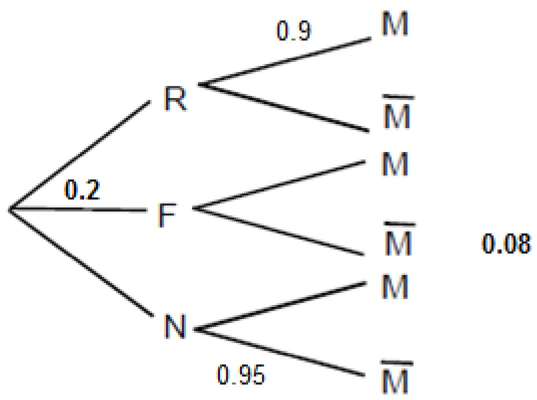
1°/ Montrer que la probabilité qu'une personne soit malade est égale à 5/48 .

2°/ Quelle était la probabilité d'être malade pour un individu non vacciné ? Le vaccin est-il efficace ?

Exercice Un test d'une maladie est effectué sur la totalité d'une population .

L'étude statistique établit que 70% de la population réagit négativement au test .

On choisit au hasard une personne de cette population et on considère les évènements suivant :
N « la personne choisie réagit négativement au test »
F « la personne choisie réagit faiblement au test »
R « la personne choisie réagit fortement au test »
M « la personne choisit est atteinte de la maladie »



1°/ Compléter l'arbre de probabilités ci-contre .
2°/ Calculer la probabilité de l'évènement M .
3°/ Déterminer la probabilité qu'une personne choisie réagit fortement sachant qu'elle est malade .

Formule de Bayes Soit (E , $\mathcal{P}$(E) , p) un espace probabilisé fini .

$B_1, B_2, \ldots\ldots, B_n$ sont des évènements de probabilités non nulles , formant une partition de E .

Soit A un évènement de probabilité non nulle ; alors on a : $P(B_k/A) = \dfrac{p(A\cap B_k)}{p(A)} = \dfrac{p(A/B_k).p(B_k)}{\sum_{i=1}^{i=n} p(A/B_i).p(B_i)}$

Exemple Dans une région , on a remarqué que 5% des hommes et 0,25% des femmes sont daltoniens et sont en proportions égales . Quelle est la probabilité pour qu'une personne daltonienne choisie au hasard soit un homme ?