Prof: FehriBechir	Fonctions réciproques	Bac Math + Science 2019 – 2020

Exercice 1 :

I) Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x+1}}$. C_f la courbe de f dans un RON $(O,\vec{i},\vec{j})$

1. a. Dresser le tableau de variation de f.

b. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+, 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$; et que $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$.

2) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $\mathbb{R}_+$, une solution unique α et que $2.3 < \alpha < 2.5$. Tracer C_f

Soit g la restriction, de f sur $\mathbb{R}_+$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$, sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Tracer la courbe représentative C_g de $C_{g^{-1}}$ dans le même repère que C_f.

c) Montrer que pour tout $x \in J$, $g^{-1}(x) = \frac{2\sqrt{x^2-4}}{x-\sqrt{x^2-4}}$

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \sqrt{\sin x}$. (C) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

Dresser le tableau de variation de f et tracer (C).

Montrer que f réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[0,1]$. Tracer la courbe (C') de f^{-1}

Montrer que f^{-1} est dérivable sur $[0,1[$ et que $(f^{-1})'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

Soit g la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par $g(x) = f^{-1}(\sqrt{\cos x}) + x$.

a) Montrer que g est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

b) Montrer que g est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $g'(x)$. Montrer que pour tout $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right], g(x) = \frac{\pi}{2}$

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{2}cos(\frac{\pi}{2}x)}$

Montrer que f réalise une bijection de $[0,1]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

Montrer que f^{-1} est dérivable sur $\left[0,\frac{1}{2}\right[$ et que $\boldsymbol{(f^{-1})'(x) = -\frac{4}{\pi\sqrt{1-4x^2}}}$

a) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$ on a $|f'(x)| \leq \frac{\pi}{4}$

b) Montrer que l'équation $f\ (x) = x$ admet dans $[0,1]$ une solution unique α

c) Montrer que sou tout $x\ \in\ [0,1]$ on a $|f(x) - \alpha| \leq \frac{\pi}{4}|x - \alpha|$

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} \boldsymbol{U_0 = \frac{1}{2}} \\ \boldsymbol{U_{n+1} = f(U_n); \forall n \in \mathbb{N}} \end{cases}$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ 0 \leq U_n \leq 1$

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\pi}{4}|U_n - \alpha|$

C) Dédire que $\forall n \in \mathbb{N},\ |U_n - \alpha| \leq (\frac{\pi}{4})^n$, Déterminer alors $\lim_{n\to\infty} U_n$

La première règle de la réussite, ne jamais remettre au lendemain l'exécution d'un travail