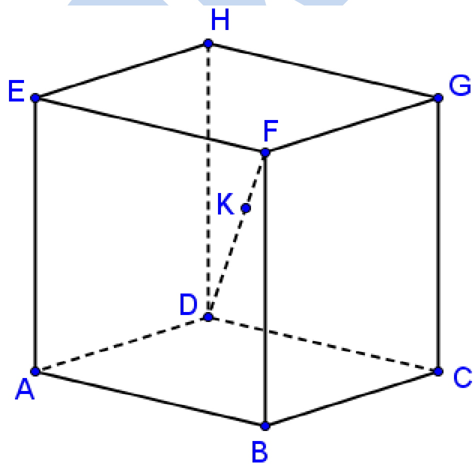
Lycée Tahar Sfar Mahdia	**Devoir de contrôle n° 2** *Mathématiques*	*Niveau : 4 ème Sc exp₁*
Date : 04 / 12 / 2017	*Prof : Meddeb Tarek*	*Durée : 2 heures*

Exercice n°1 : (7 pts)

Soit $ABCDEFGH$ un cube d'arête 1. On munit l'espace du repère orthonormé direct $\left(D,\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DH}\right)$.

1) Soit K le point définie par : $\overrightarrow{DK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DF}$.

   Montrer que K a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$.



2) Montrer que les droites (EK) et (DF) sont orthogonales.

3) Soit M est le point défini par $\overrightarrow{HM}=m\overrightarrow{HG}$, où m un réel.

   $a/$ Calculer, en fonction de m, le produit vectoriel $\overrightarrow{DF}\wedge\overrightarrow{DM}$.

   $b/$ En déduire, en fonction de m, l'aire $\mathcal{A}$ du triangle MDF.

   $c/$ Montrer que le volume $\mathcal{V}$ du tétraèdre $EMDF$ ne dépend pas de m.

4) On note d_m la distance du point E au plan (MDF).

   $a/$ Montrer que $d_m=\frac{1}{\sqrt{2m^2-2m+2}}$.

   $b/$ Déterminer la valeur de m pour laquelle la distance d_m est maximale.

   $c/$ En déduire que, lorsque la distance d_m est maximale, le point K est le projeté orthogonal de E sur le plan (MDF).

Exercice n°2 : (6 pts)

Soient U et V les suites réelles définies sur IN par :

$$U_0=3,\quad V_0=1,\quad U_{n+1}=\frac{9U_n+2V_n}{10}\quad \text{et}\quad V_{n+1}=\frac{2U_n+6V_n}{10}.$$

1) On pose, pour tout $n\in IN$, $W_n=U_n-2V_n$.

   $a/$ Montrer que W est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

$b/$ Exprimer W_n en fonction de n puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n$.

2) $a/$ Montrer que la suite U est décroissante et que V est croissante.

$b/$ Montrer que, pour tout $n \in IN$, on a : $2 \le 2V_n \le U_n \le 3$.

En déduire que U et V sont convergentes.

$c/$ On note $l = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ et $l' = \lim\limits_{n\to+\infty} V_n$. Montrer que $l = 2l'$.

3) On pose, pour tout $n \in IN$, $t_n = 2U_n + V_n$.

$a/$ Montrer que t est une suite constante, en déduire que $2l + l' = 7$.

$b/$ Déterminer alors l et l'.

Exercice n°3 : (7 pts)

On considère les nombres complexes z_n définis, pour tout $n \in IN$, par :

$$z_0 = 1 \quad \text{et} \quad z_{n+1} = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right) z_n .$$

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. On note A_n le point d'affixe z_n.

1) $a/$ Vérifier que $1 + i\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} e^{i\frac{\pi}{6}}$.

$b/$ Donner alors la forme exponentielle de z_1 et z_2.

2) $a/$ Montrer que, pour tout $n \in IN$, $z_n = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{6}}$.

$b/$ Déterminer les entiers n pour lesquelles les points O, A_0 et A_n sont alignés.

3) On pose, pour tout $n \in IN$, $d_n = \left|z_{n+1} - z_n\right|$.

$a/$ Donner une interprétation géométrique de d_n. Calculer d_0.

$b/$ Montrer que, pour tout $n \in IN$, $z_{n+2} - z_{n+1} = \left(1 + i\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(z_{n+1} - z_n\right)$.

$c/$ En déduire que la suite (d_n) est géométrique puis que $d_n = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$, pour tout $n \in IN$.

4) $a/$ Montrer que, pour tout $n \in IN$, on a : $\left|z_{n+1}\right|^2 = \left|z_n\right|^2 + d_n^2$.

$b/$ En déduire que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n.

$c/$ Placer, dans le repère $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ le point A_0 et construire les points A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 et A_6.

Bonne chance