EXERCICE N°1 : (ROMMANI FAHMI 99826467)

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = x.\sqrt{e^x}$ et $(\mathcal{C}_f)$sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1/ a) Montrer que $f'(x) = \left(\frac{2+x}{2}\right)e^{\frac{x}{2}}$.

b) Dresser le tableau de variations de f sur IR .

c) Calculer f(0) puis en déduire le signe de f(x) pour tout réel x .

2/ a) Donner une équation cartésienne de la droite D tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0 .

b) Etudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à D.

3/ Préciser l'équation de l'asymptote (Δ) à $(\mathcal{C}_f)$ en $-\infty$.

4/ Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ admet un point d'inflexion K dont on précisera les coordonnées.

5/ Tracer les droites D , (Δ) et la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

6/ Soit $\mathcal{A}$ l'aire en unités d'aire de la partie du plan délimitée par $(\mathcal{C}_f)$, D , $x = -2$ et $x = 2$ .Calculer $\mathcal{A}$.

7/ Soit $C' = \{M(x, f(x))$ $du\ plan\ tel\ que\ x \in [-2;2]\}$.

Soit $\mathcal{T}$ le solide de révolution obtenu en faisant tourner (C') de f autour de l'axe des abscisses .Calculer le volume V de $\mathcal{T}$ en unités de volume.

8/ Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} U_0 = -2 \\ U_{n+1} = f(U_n) pour\ tout\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

a)Montrer que pour tout entier naturel n on a : $-2 \leq U_n \leq 0$.

b)Montrer que la suite (U_n) est croissante.

c)En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

9/ Soit l'équation différentielle E : $y' - \frac{y}{2} = e^{\frac{x}{2}}$.

a)Résoudre l'équation E' : $y' = \frac{y}{2}$.

b)Montrer que f est une solution de (E).

Solution :

1/ a) $f(x) = xe^{\frac{x}{2}} \Rightarrow f'(x) = e^{\frac{x}{2}} + \frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}} = \left(\frac{x+2}{2}\right)e^{\frac{x}{2}}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

$Si\ x \leq -2\ alors\ x + 2 \leq 0\ alors\ f'(x) \leq 0.$

$Si\ x \geq -2\ alors\ x + 2 \geq 0\ alors\ f'(x) \geq 0.$

b)

X	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
f	0	↘	$\frac{-2}{e}$	↗	$+\infty$

c) f(0) = 0 alors $f(x) \leq 0\ si\ x \leq 0$ $et\ f(x) \geq 0\ si\ x \geq 0.$

2/ a) D : $y = f'(0).(x-0) + f(0) = x$ $\Rightarrow D: y = x$.

b) $f(x) - x = x\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)$;

$si\ x \leq 0\ alors\ e^{\frac{x}{2}} \leq 1\ alors\ f(x) \geq x\ alors\ (\mathcal{C}_f) est\ au\ dessus\ de$ D.

$si\ x \geq 0\ alors\ e^{\frac{x}{2}} \geq 1\ alors\ f(x) \geq x\ alors\ (\mathcal{C}_f) est\ au\ dessus\ de$ D.

X	$-\infty$		-4		$+\infty$
$f''(x)$		-	0	+	

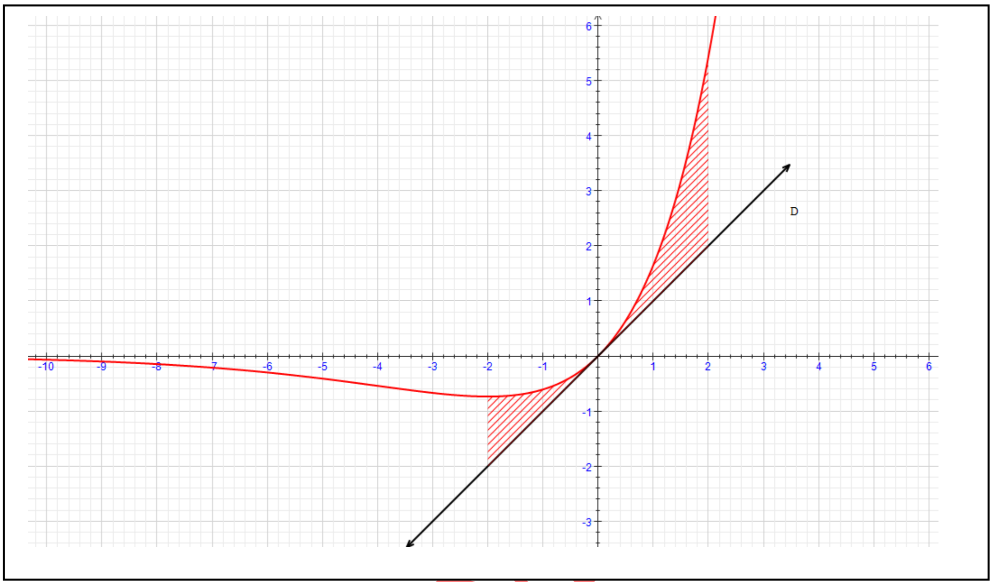
3/ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^{\frac{x}{2}} = \lim\limits_{x\to-\infty} 2\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}} = 0\ alors\ (x'x): y = 0\ est\ une\ asymptote$ à $(\mathcal{C}_f)\ en - \infty$

4/ $f''(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} + \left(\frac{x+2}{4}\right)e^{\frac{x}{2}} = \left(\frac{x+4}{4}\right)e^{\frac{x}{2}}$.

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4$.

$f''(x)$ s'annule en changeant de signe alors $(\mathcal{C}_f)$admet un point d'inflexion K(-4 ;-4e^{-2}).

5/



6/ $\mathcal{A} = \int_{-2}^{2} |f(x) - x|\, dx = \int_{-2}^{2} x\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right) dx$ on intègre par parties.

On pose : $\begin{cases} u(x) = x \\ V'(x) = e^{\frac{x}{2}} - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ V(x) = 2e^{\frac{x}{2}} - x \end{cases}$

D'où $\mathcal{A} = \left[x\left(2e^{\frac{x}{2}} - x\right)\right]_{-2}^{2} - \int_{-2}^{2}\left(2e^{\frac{x}{2}} - x\right) dx = 4e - 4 + \frac{4}{e} + 4 - \left[4e^{\frac{x}{2}} - \frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{2}$

$= 4e + \frac{4}{e} - \left(4e - 2 - \frac{4}{e} + 2\right) = 8e^{-1}(u\ a)$

7/ $V = \pi\int_{-2}^{2} f^2(x)dx = \pi\int_{-2}^{2} x^2e^x dx$ avec une double intégration par parties .

On pose : $\begin{cases} u(x) = x^2 \\ V'(x) = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 2x \\ V(x) = e^x \end{cases}$ alors $\int_{-2}^{2} x^2e^x dx = [x^2e^x]_{-2}^{2} - \int_{-2}^{2} 2xe^x dx$

On pose : $\begin{cases} w(x) = 2x \\ T'(x) = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w'(x) = 2 \\ T(x) = e^x \end{cases}$ alors $\int_{-2}^{2} 2xe^x dx = [2xe^x]_{-2}^{2} - \int_{-2}^{2} 2e^x dx$

Alors $V = \pi[\,4e^2 - 4e^{-2} - \left(4e^2 + 4e^{-2} - [2e^x]_{-2}^{2}\right) = \pi(-8e^{-2} + 2e^2 - 2e^{-2})$

Alors $V = 2\pi(e^2 - 5e^{-2})$ (UV)

8/ a) On procède par récurrence sur n.

On a : $U_0 = -2$ alors $-2 \leq U_0 \leq 0$.

Supposons que $-2 \leq U_n \leq 0$ et montrons que $-2 \leq U_{n+1} \leq 0$

On a : f est strictement croissante sur [-2 ; 0] et $-2 \leq U_n \leq 0$ alors $f(-2) \leq f(U_n) \leq f(0)$

Alors $-2 \leq -2e^{-1} \leq U_{n+1} \leq 0$ alors $-2 \leq U_{n+1} \leq 0$

Conclusion : pour tout entier n on a : $-2 \leq U_n \leq 0$.

b) $U_{n+1} - U_n = f(U_n) - U_n$ or $f(x) \geq x$ pour tout x $\in IR$ alors $f(U_n) \geq U_n$ alors (U_n) est croissante

or d'après 8/ b) (U_n)est majorée par 0 alors (U_n) est convergente vers un réel L$\in [-2;0]$.

On a : $U_{n+1} = f(U_n)$, f est continue sur [-2 ;0] et (U_n) est convergente vers un réel L$\in [-2;0]$alors f(L)=L.

Alors $Le^{\frac{L}{2}} = L \Rightarrow L\left(e^{\frac{L}{2}} - 1\right) = 0 \Rightarrow L = 0 \; ou \; e^{\frac{L}{2}} = 1 \;\Rightarrow L = 0$ d'où $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$.

9/ Soit E : $y' - \frac{y}{2} = e^{\frac{x}{2}}$.

a) $(E') : y' = \frac{y}{2} \; alors \; y(x) = \lambda e^{\frac{x}{2}} \; avec \; \lambda \in IR$.

b) on a : $f'(x) - \frac{f(x)}{2} = \left(\frac{x+2}{2}\right)e^{\frac{x}{2}} - \frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}} = e^{\frac{x}{2}}$ alors f est une solution de (E) .