

SERIE D'EXERCICE N°22

LOGARITHME NEPERIEN ET GRAPHES

4 EME ANNEE SECONDAIRE

ROMMANI FAHMI 99826467

EXERCICE N°1 :

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 1 + 2x + \frac{x^2}{2} + \ln(x)$ et (Γ_f) sa représentation graphique dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan.

- 1) Calculer : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.
- 2) Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
- 3) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$.
- 4) Montrer que f est une bijection de $]0; +\infty[$ vers $]-\infty; +\infty[$.
- 5) Dresser le tableau de variations de f .
- 6) Donner une équation de la tangente (T) à (Γ_f) au point d'abscisse 1.
- 7) Tracer (T) et (Γ_f) .
- 8) Soit $F(x) = x^2 + \frac{x^3}{6} + 1 + x \cdot \ln x$.
 - a) Montrer que F est une primitive de f sur $]0; +\infty[$.
 - b) Calculer l'aire \mathcal{A} de la partie du plan limitée par (Γ_f) , les droites $x = 1$, $x = e$ et l'axe des abscisses.

EXERCICE N°2 :

On considère une population donnée d'une île du Japon se rendant régulièrement à la capitale Tokyo. Deux compagnies maritimes A et B effectuent la traversée. En 2008, 60% de la population voyage avec la compagnie A. Une enquête indique que chaque année 20% des clients de A l'abandonnent au profit de la compagnie B et que 10% des clients de B choisissent A.

Pour tout entier naturel n , l'état probabiliste de l'année

$(2008 + n)$ est définie par la matrice ligne $(x_n \ y_n)$ où x_n désigne la proportion de la population qui voyage avec A et y_n celle de B.

1/ Décrire la situation à l'aide d'un graphe probabiliste.

2/ Donner la matrice M de transition de ce graphe.

3/Préciser l'état initial puis montrer que $P_1 = (0,52 \quad 0,48)$

4/Déterminer la répartition en 2011.

5/ Déterminer l'état stable.

6/Montrer que $x_n = 0,7 \cdot x_n + 0,1$.

7/On donne: $x_n = \frac{4}{15} \times 0,7^n + \frac{1}{3}$.

Déterminer la limite de x_n et interpréter.

Correction :

$$1/ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + 2x + \frac{x^2}{2} + \ln(x) = -\infty .$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + 2x + \frac{x^2}{2} + \ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+2x+\frac{x^2}{2}+\ln(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + \frac{2}{x} + \frac{x}{2} + \frac{\ln x}{x} = +\infty .$$

2/ La droite $(y'y) : x = 0$ est une asymptote verticale à (Γ_f) .

(Γ_f) admet une branche parabolique de direction $(y'y)$ aux voisinage de $+\infty$.

3/ $f'(x) = x + 2 + \frac{1}{x}$ pour tout $x \in]0; +\infty[$.

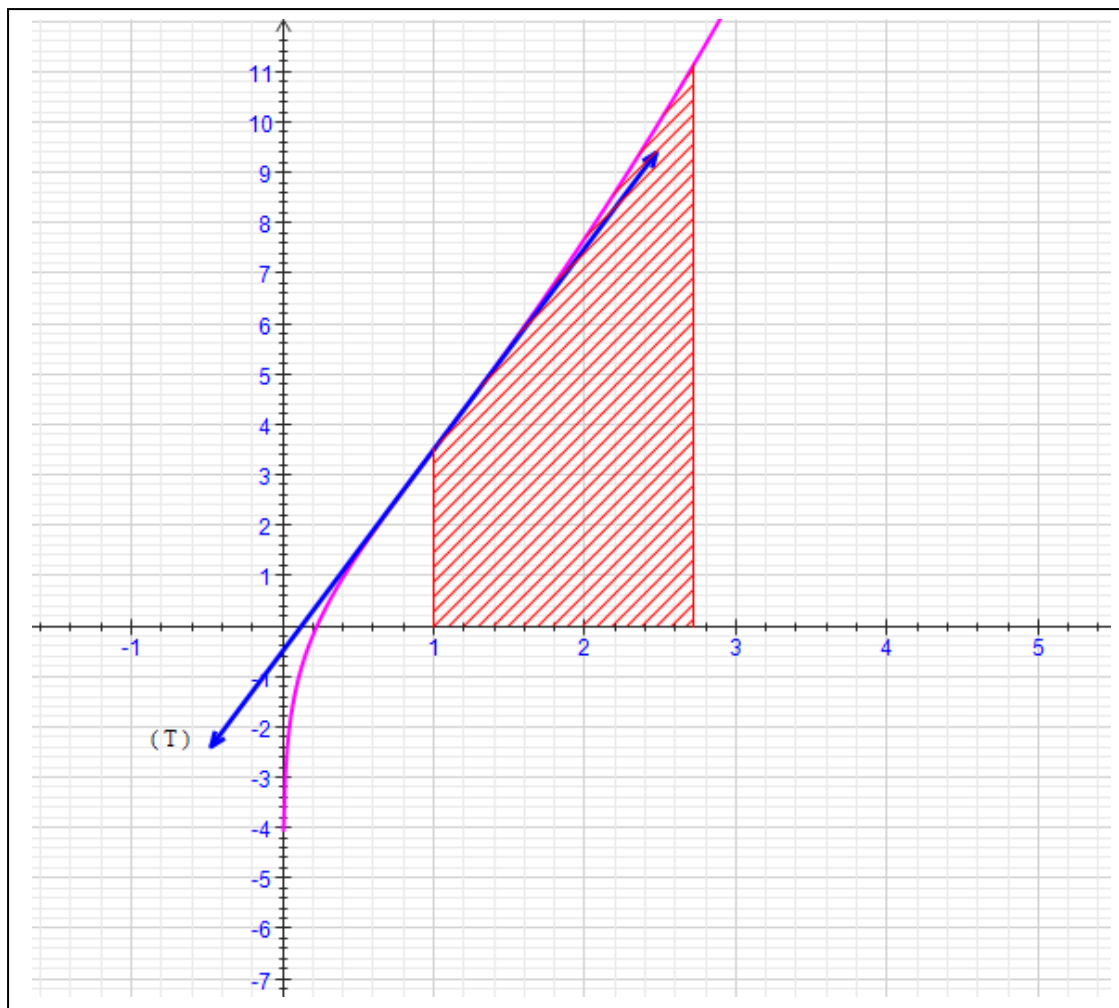
4/ $x \in]0; +\infty[$ alors $f'(x) > 0$ alors f est une bijection de $]0; +\infty[$ vers $] -\infty; +\infty[$.

5/

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
f	$-\infty$	$+\infty$

$$6/ T : y = f'(1) \cdot (x - 1) + f(1) = 4(x - 1) + \frac{7}{2} = 4x - \frac{1}{2}.$$

7/



8/ a / $F'(x) = 2x + \frac{x^2}{2} + \ln(x) + 1 = f(x)$ alors F est une primitive de f sur $]0; +\infty[$.

$$b/ \mathcal{A} = \int_1^e |f(x)| dx = \int_1^e 1 + 2x + \frac{x^2}{2} + \ln(x) dx = [F(x)]_1^e = F(e) - F(1)$$

$$= e^2 + \frac{e^3}{6} + 1 + e - \left(2 + \frac{1}{6}\right) = \frac{e^3}{6} + e^2 + e - \frac{7}{6}$$