Exercice N°1

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de diamètre $[BC]$.
A le point de $\mathscr{C}$ tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$, A' le point diamétralement opposé à A sur $\mathscr{C}$ et $I = S_{(BC)}(A)$

1. (a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f telle que $f(A) = C$ et $f(B) = O$.
   (b) Montrer que f est une rotation. Montrer que I est le centre de f.
   (c) Montrer que $f(O) = A'$.
2. Soit g l'antidéplacement tel que $g(A) = A'$ et $g(B) = C$.
   (a) Montrer que $g = S_O \circ S_{(AB)}$.
   (b) Déduire la nature et les éléments caractéristiques de g.
3. Soit E le point tel que $OICE$ est un parallélogramme et $D = f(C)$. On pose $t = f \circ r_{(D, -\frac{\pi}{3})}$.
   (a) Déterminer $t(C)$ est caractériser t.
   (b) Déterminer $t(E)$. En déduire la nature du triangle EBD

Exercice N°2

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$, on désigne par O le milieu du segment [BC].

1. Montrer que le triangle OCA est équilatéral.
2. a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui envoie O sur A et B sur C.
   b) Montrer que f est une rotation. Construire son centre I.
   c) En calculant $\left(\widehat{\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IO}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{IO}, \overrightarrow{IA}}\right)$ montrer que I appartient au segment [AB].
   d) Calculer le rapport $\frac{IA}{IC}$, en déduire que I est le barycentre des points pondérés (A,2) et (B,1).
3. Soit r la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
   a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $f \circ r$.
   b) Soit C' l'image de C par f, montrer que O, I et C' sont alignés.
4. a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement g qui transforme O en A et B en C.
   b) Montrer que g est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.

c) Montrer que g(C) = C'.

5. Soit $h = t_{\overrightarrow{BC}} \circ S_{(AB)}$. Donner la nature et les éléments caractéristiques de h.

Exercice N°3

On désigne par I et J les milieux respectifs de [AB] et [CD].

1. Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que f(A) = C et f(I) = J. caractériser f.

2. Soit g = $R_{\left(I, \frac{\pi}{2}\right)} \circ$ f.

a) Montrer que g est une rotation dont on précisera l'angle.

b) Déterminer g(A).

c) Déduire une construction du point Ω centre de g.

3. Soit h l'antidéplacement tel que h(A) = C et h(I) = J.

a) Montrer que h est une symétrie glissante.

b) Montrer que h(B) = D.

c) On pose h(D) = D'. Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CD'}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et AD = CD'.

d) En déduire que D' est le symétrique de B par rapport à C.

e) En déduire la forme réduite de h.

4. a) Construire le point C' = h(C).

b) Le cercle de diamètre [AB] recoupe [AC] en E, le cercle de diamètre [CD] recoupe [CC'] en E'.

Soit F le symétrique de E' par rapport à (IJ). Montrer que h(E) = E' et que $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{IJ}$.

Exercice N°4

Soit ABC un triangle rectangle en C tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Soient D = r(C) et E = r^{-1} (B).

On désigne par I le milieu du segment [CD].

1. a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que f(A) = D et f(C) = A.

   b) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f.

2. Soit g = f o r.

   a) Montrer que g est une translation.

   b) Soit F = g(E).

      Montrer que f(B) = F et en déduire la nature du triangle BIF.

   c) Montrer que les points C, A et F sont alignés.

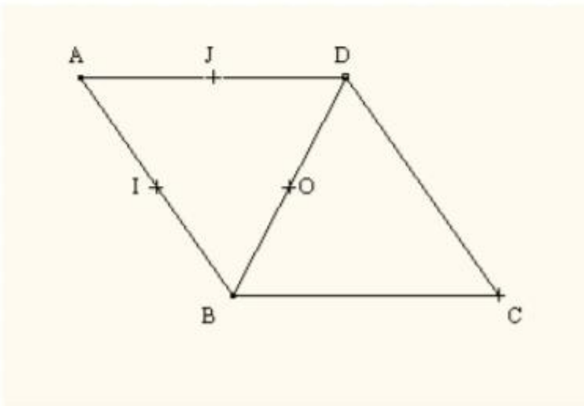
3. Soit $G = t_{\overrightarrow{AD}}(I)$ où $t_{\overrightarrow{AD}}$ désigne la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$.

   a) Montre qu'il existe un unique antidéplacement φ tel que $\varphi(C) = D$ et $\varphi(I) = G$.

   b) Montrer que φ est une symétrie glissante dont on précisera le vecteur et l'axe.

Exercice N°5

Le plan est orienté dans le sens direct. Dans la figure ci – contre, ABCD est un losange de centre O, I est le milieu du segment [AB], J est le milieu du segment [AD] et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.



1. a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f qui transforme A en B et B en D.

   b) Caractériser f.

   c) Déterminer l'image du triangle ABD par f.

2. Soit S un antidéplacement qui transforme l'ensemble $\{A, B, D\}$ en l'ensemble $\{B, C, D\}$ et tel que S(A) = C.

   a) Déterminer l'image du segment [BD] par S.

   b) En déduire que S est la symétrie orthogonale d'axe (BD).

3. Soit g un antidéplacement qui transforme l'ensemble $\{A, B, D\}$ en l'ensemble $\{B, C, D\}$ et tel que g(A) = D.

   a) Montrer que g(D) = B.

   b) Caractériser alors g.

Exercice N°6

Le plan orienté dans le sens direct.

On considère un rectangle ABCD tel que AB = 2AD et $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

On désigne par I , J et Ω les milieux respectifs de $[AB]$, $[DC]$ et $[JB]$.

1) a/ Montrer qu'il existe un unique déplacement R tel que R(B) = A et R(C) = I.

b/ Caractériser R.

2) Soit l'application f = $t_{\overrightarrow{JB}}$ o R.

a/ Déterminer la droite Δ tel que $t_{\overrightarrow{JB}} = S_{(IC)}$ o S_{Δ}.

b/ En décomposant convenablement R, montrer que f est la rotation de centre I et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

3) Soit g = f o $S_{(DC)}$

a/ Déterminer g(D) et g(J)

b/ En déduire que g est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur

4) Soit h = $S_{(AJ)}$ o g^{-1}.

Déterminer h(B) et h(C) puis caractériser h.

5) Soit M un point du plan et M_1 et M_2 les points tel que g(M) = M_1 et $t_{\overrightarrow{JB}}$(M) = M_2 .

Montrer que M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à une droite fixe que l'on précisera.

6) On munit le plan d'un repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AD})$ et soit φ l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = -i\bar{z} + 3 + i$$

a/ Montrer que φ est une isométrie.

b/ Montrer que φ est sans points fixes et en déduire la nature de φ.

c/ Montrer que $\varphi o \varphi = t_{\overrightarrow{2IB}}$, puis prouver que φ = g.