Lycée : EL ALIA A scolaire	Devoir de contrôle n°1 4maths 1	Prof : Lahbib Mohamed Durèe :2h

Exercice1 : (3,5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points

A, B et C d'affixes respectifs : $Z_A = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, $Z_B = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$ et $Z_C = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

a) Construire les points A et C.

b) Vérifier que $\frac{Z_C}{Z_A} = i$ puis déduire la nature du triangle OAC.

c) Ecrire (1-i) sous forme exponentielle puis déduire que : $(1-i)Z_A = Z_B$

d) Montrer que OBAC est un parallélogramme puis construire le point B.

3) a) Construire le cercle (C) de centre O et de rayon $2\sqrt{2}$ .La perpendiculaire à (OB) passant par O coupe le cercle (C) en un point D d'affixe Z_D dont <u>sa partie imaginaire est positive</u>.

a) Justifier que $Z_D = i\, Z_B$.

b) Montrer que OAD C est un carré.

Exercice2 : (4,5points)

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) $z^2 - 4iz - 2 + 2i\sqrt{3} = 0$.

1/ a) vérifier que $a = 1 + i\left(2 - \sqrt{3}\right)$ est une solution de (E).

b) Déduire l'autre solution b de (E).

2/ a) Montrer que $a^2 = 4\left(2 - \sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{6}}$.

b) Donner alors une mesure de l'argument de a.

3/ Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}; \vec{v})$.Soient A, B et C les points d'affixes respectives $a; b$ et $c = 2i + 2e^{i\frac{\pi}{7}}$. On note ($\mathscr{C}$) le cercle de diamètre [AB].

a) Préciser l'affixe de Ω centre du cercle ($\mathscr{C}$) .

b) Montrer que les points O et C appartiennent a ($\mathscr{C}$).

c) Montrer $\frac{c-a}{c-b}$ est imaginaire pure.

4/ Placer Ω, tracer le cercle ($\mathscr{C}$) puis construire les points A et B. (laisser les traits de la construction apparents).

5/ Donner une mesure de l'argument de b.

Exercice3 : (6points)

Soit U la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = {U_n}^2 - U_n + 1$

1.) a. Montrer que la suite U est croissante.

b. En déduire que ,$\forall\, n \in \mathbb{N}$; $U_n \geq 2$.

2.) a. Montrer que si $U_n \geq n$ alors $U_n(U_n - 1) \geq n$

b. Montrer par récurrence que , ,$\forall\, n \in \mathbb{N}$; $U_n \geq n$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

3.) Soit la suite (S_n) definie par : $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{1}{u_k}$

a. Montrer que , ,$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{U_n} = \frac{1}{U_n - 1} - \frac{1}{U_{n+1} - 1}$

b. En déduire que , $S_n = 1 - \frac{1}{U_n - 1}$ et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

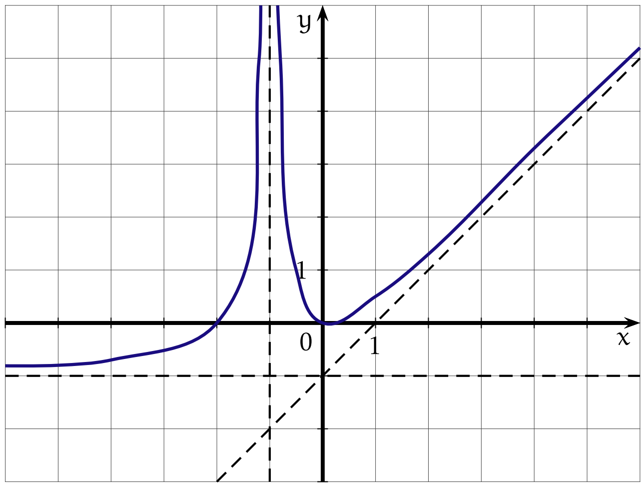
4.) On pose : $T_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} (U_k - 1)^2$

Montrer que , ,$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $T_n = U_n - 2$. Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$

Exercice4 : (6points)

Partie A

On a représenté dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ la courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et les droites $\Delta_1 : x = -1$, $\Delta_2 : y = -1$ et $\Delta_3 : y = x - 1$ des asymptotes à $\mathcal{C}_f$.



1. Par lecture graphique déterminer :

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{f(x)+1}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - 2x$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(4x^2\left(1\text{-}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right)$ et $\lim\limits_{x\to 0} f\left(-x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$.

2. a) Déterminer l'ensemble de définition de $f \circ f$.

b) Déterminer $(f \circ f)\left(]-\infty, -2]\right)$.

Partie B

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} x^2\left(1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) & si\ x < 0 \\ \frac{2x^2}{1+x^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

1. a. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ .Interpréter graphiquement le résultat.

b. Montrer que pour tout réel $x < 0$ on a : $0 \leq f(x) \leq 2x^2$

c. En déduire que f est continue à gauche en 0.

2. a. Montrer que pour tout réel $x < 0$, on a : $2x \leq \frac{f(x)}{x} \leq 0$

b. Etudier la dérivabilité de f à gauche en 0