

Exercice n°1 : (3 points)

Montrer ces résultats

1) Soit le nombre complexe $z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ alors z^3 est un réel négatif.

2) $e^{i\frac{7\pi}{12}} + e^{i\frac{\pi}{4}} = 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)e^{i\frac{5\pi}{12}}$

3) Les suites définies sur \mathbb{N}^* par $U_n = \frac{1}{n}$ et $V_n = \frac{-1}{n^2}$ sont adjacentes.

Exercice n°2 : (6 points)

1) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . On considère les points

A, B et C d'affixes respectifs : $Z_A = 1 + i\sqrt{3}$, $Z_B = -\sqrt{3} + i$ et $Z_C = 2 + 2i$

a) Ecrire Z_A et Z_B sous forme exponentielle.

b) Construire les points A et B dans le repère.

c) Montrer que OAB est un triangle rectangle et isocèle en O.

2) a) Construire le point E du plan tel que OAEB soit un carré.

b) Montrer graphiquement que $Z_E = 2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$

c) Vérifier que $Z_E = Z_A + Z_B$ puis écrire Z_E sous forme algébrique.

d) Déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

3) a) Montrer que E et C appartiennent au même cercle de centre O et puis placer le point C.

b) Montrer que les vecteurs \vec{AC} et \vec{BC} sont colinéaires.

c) En déduire que OEC est un triangle équilatéral.

Exercice n°3 : (7 points)

Soit la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1+\sin x}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \\ x^3 + x + 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue en 0

2) a) Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$ on a : $\frac{x}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{x+2}{x+1}$

b) Déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

3) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{x}{x^2+2}\right)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f\left(\frac{-2}{\sqrt{x-2}}\right)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x)-1}{f(x)-1}$

4) a) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $] -\infty, 0[$

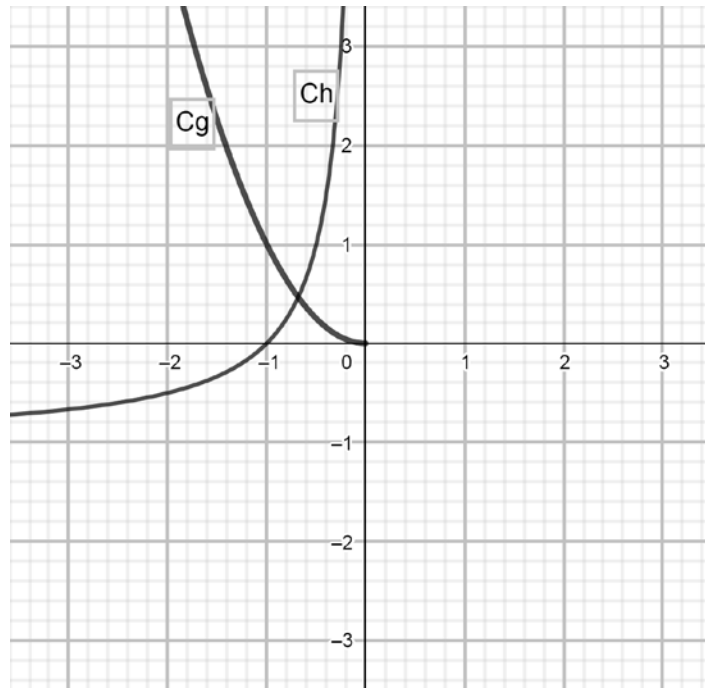
b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $] -\infty, 0[$ [puis vérifier que $-0.7 < \alpha < -0.6$

5) La courbe ci-dessous est celle des fonctions h et g définies sur $] -\infty, 0[$ par $h(x) = -1 - \frac{1}{x}$ et $g(x) = x^2$ et soit A leur point d'intersection.

a) Montrer que le point A admet pour abscisse α .

b) Etudier graphiquement la position relative des deux courbes.

c) Vérifier que $f(x) = x[g(x) - h(x)]$ puis dresser le tableau de signe de f(x) sur $] -\infty, 0[$.



Exercice n°4 :(4 points)

Soit (U_n) la suite définie sur \mathbb{N} par :

$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{4U_n - 2}{U_n + 1} \end{cases}$$

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n \geq 2$.

b) Montrer que (U_n) est décroissante.

c) Dédire que (U_n) est convergente et calculer sa limite.

3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} - 2 \leq \frac{2}{3} (U_n - 2)$.

b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n - 2 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

c) Retrouver la limite de U .

4) Soit la suite $S_n = \sum_{k=0}^n U_k$

a) Montrer que pour tout n on a : $2(n+1) \leq S_n \leq 2(n+1) + 3\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]$

b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n}$

Bon travail