

ETUDE DE FONCTION

Ce qu'il faut absolument savoir en ce qui concerne l'étude de fonction

DOMAINE DE DEFINITION

Règle 1 :

« on ne peut pas diviser par zero »

c-a-d,

$\frac{1}{A(x)}$ est définie ssi $A(x) \neq 0$

$f: x \mapsto \frac{1}{x-1}$ est définie ssi Sig, $D_f = \dots\dots\dots$

$f: x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$ est définie ssi

Or $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dots$ ou $x = \dots$

x	
$x^2 - 1$	

Ainsi $D_f = \dots\dots\dots$

Règle 2 :

$f: x \mapsto \sqrt{\frac{x+1}{x}}$ est définie ssi

Etudions le signe de $\frac{x+1}{x}$, or $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dots$

x	
x	
$x + 1$	
$\frac{x + 1}{x}$	

Ainsi $D_f = \dots\dots\dots$

$f: x \mapsto \sqrt{x^2 + x + 1}$ est définie ssi

Etudions le signe de $x^2 + x + 1$,

or $x^2 + x + 1 = 0$, on a $\Delta = \dots\dots\dots$ avec $0^2 + 0 + 1 = 1 > 0$

donc $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 \dots 0$, Ainsi $D_f = \dots\dots\dots$

$f: x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ est définie ssi sig donc $D_f = \dots\dots\dots$

$f: x \mapsto \frac{2+x}{|x+1|-1}$ est définie ssi Sig sig

Donc $D_f = \dots\dots\dots$

$f: x \mapsto \frac{1}{\cos(x)-1}$ est définie ssi Sig Sig $x \neq \dots\dots\dots$

Ainsi $D_f = \dots\dots\dots$

ASYMPTOTES

1) $D: x = a$ est une **asymptote verticale**

à $C_f \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) = \pm\infty$

Si f n'est pas définie en a , on peut penser à une asymptote verticale.

2) $D': y = b$ est une **asymptote**

horizontale à $C_f \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$

3) $D': y = ax + b$ est une **asymptote**

oblique à $C_f \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - y] = 0$

Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$,

Les valeurs de a et b sont calculés avec les formules suivantes :

$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ et $b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax]$

Déterminer tous les asymptotes à la courbe (C) de la fonction $f(x) = \frac{2x^2}{x-1}$
 f est définie ssi sig

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \dots\dots\dots$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \dots\dots\dots$

Graphiquement, (C) admet une asymptote d'équation

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots\dots\dots$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \dots\dots\dots$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \dots\dots\dots$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = \dots\dots\dots$

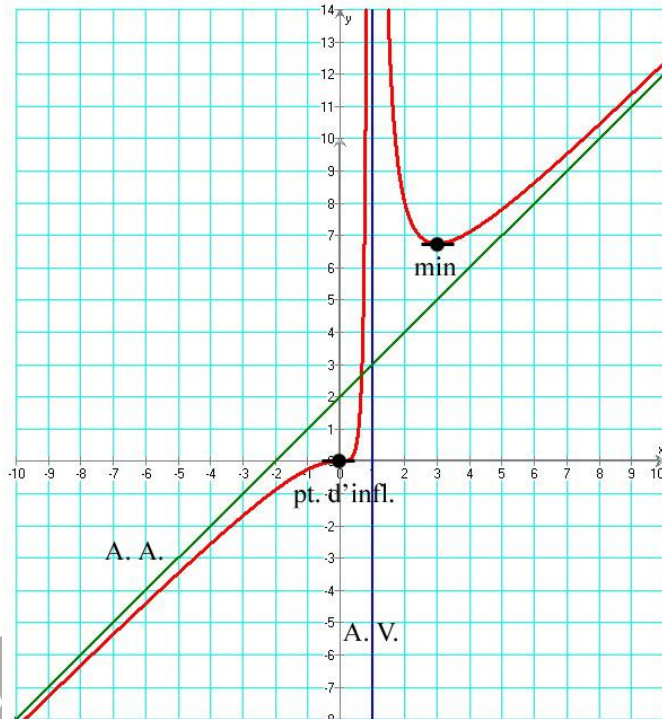
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \dots\dots\dots$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 2x] = \dots\dots\dots$$

Graphiquement, la courbe (C) admet une asymptote d'équation au voisinage de

EXEMPLE COMPLET

Etudions la fonction $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$ dont ci-dessous sa représentation graphique dans un repère orthonormé.



Domaine de définition :

Asymptote verticale : $x = 1$, en effet ;

Asymptote oblique : $y = x + 2$, en effet ;

TABLEAU DE VARIATION

- Dérivée : $\forall x \in D_f, f'(x) = \dots\dots\dots$

$$= \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$$

- Signe de $f'(x)$:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dots\dots\dots$$

Le signe de $f'(x)$ est celle du de signes de et

$$x - 3 = 0 \Leftrightarrow \dots\dots\dots \text{ et } x - 1 = 0 \Leftrightarrow \dots\dots\dots$$

x				
x^2				
$x - 1$				
$x - 3$				
$f'(x)$	+	+	-	+
$f(x)$				

Point d'inflexion :

Le point $A(a; b)$ est dit point d'inflexion pour la courbe (C) d'une fonction si :

- $f''(a) = 0$ et f'' change de signe.

x	a	
$f''(x)$	-	+
	+	-

ou

- $f'(a) = 0$ et f' ne change pas de signe.

x	a	
$f'(x)$	+	+
	-	-

POINT D'INFLEXION

$f'(0) = 0$, et le signe de $f'(x)$ ne change pas autour de 0. Donc le point $I(0; f(0)) = (0; 0)$ est un point d'inflexion pour (C) .

La tangente T en I est d'équation : $y = f'(0)(x - 0) + f(0) = 0$

On peut aussi montrer que $I(0; 0)$ est un point d'inflexion pour (C) en calculant la dérivée seconde f'' de f . En effet ;

$$\forall x \in D_f, f''(x) = \dots\dots\dots$$

$$= \frac{6x}{(x-1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \dots\dots\dots \text{ et } (x - 1)^3 = 0 \Leftrightarrow \dots\dots\dots$$

Rq: le signe de $f''(x)$ est celle du produit de signes de $2x$ et $(x - 1)^3$

x			
$2x$			
$(x - 1)^3$			
$f''(x)$			

TABLEAU DE VARIATION

Dans chaque cas, calculer la dérivée f' de la fonction f , déterminer son signe sur l'intervalle I et tracer le tableau de variation de f .

- $f(x) = x^2 - 32\sqrt{x} + 31$, $I =]0; +\infty[$

$$f'(x) = \dots\dots\dots$$

$$= \frac{2(\sqrt{x}^3 - 2^3)}{\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dots\dots\dots \Leftrightarrow \dots\dots\dots \Leftrightarrow \dots\dots\dots$$

Si $0 < x \leq 4$ on a $\dots\dots\dots$

x	0	$+\infty$
$x\sqrt{x} - 8$		
$f'(x)$		
$f(x)$		

- $f(x) = \frac{2+\sqrt{4-x^2}}{x}$, $I =]0; 2[$

$$f'(x) = \dots\dots\dots$$

$$= \frac{2(2-\sqrt{4-x^2})}{x\sqrt{4-x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dots\dots\dots$$

Etudions le signe de $2 - \sqrt{4 - x^2}$.

$x \in]0; 2[$, $0 < x < 2$ Sig
 Sig.....

x	
$f'(x)$	
$f(x)$	

• $f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$, $I = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \dots\dots\dots$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{x^2+x+1}(x^2+x+1)}$$

.....

x	
$f'(x)$	
$f(x)$	

Etudier les fonctions suivantes selon l'exemple précédent.

1. $f(x) = \frac{-3x+4}{2x+3}$

2. $f(x) = \frac{x^2-4x-5}{2(x^2-4x+3)}$ aide : $f''(x) = \frac{-8(3x^2-12x+13)}{(x^2-4x+3)^3}$

3. $f(x) = \frac{x(x-3)^2}{(x-2)^2}$ aide : $f''(x) = \frac{6(4-x)}{(x-2)^4}$

4. $f(x) = \frac{x^3+x^2-2}{x^2-1}$

5. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.