Résumé : Nombres complexes

1. Définition et opérations sur les nombres complexes :

Théorème et définition :

Il existe un ensemble appelé ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, et vérifiant les propriétés ci-dessous :

1. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

2. Il existe un élément de $\mathbb{C}$ noté i tel que $i^2 = -1$.

3. L'ensemble $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui vérifient les propriétés que l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$.

4. Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit de façon unique sous la forme $z = a + ib$, où a et b sont des réels.

Cette écriture est appelée écriture cartésienne (ou algébrique) de z.

Conséquences :

Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ tels que a, b, a' et b' sont des réels.

- $z = 0 \Leftrightarrow a = 0$ et $b = 0$
- $z = z' \Leftrightarrow a = a'$ et $b = b'$.
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow b = \operatorname{Im}(z) = 0$.
- $z \in i\,\mathbb{R} \Leftrightarrow a = \operatorname{Re}(z) = 0$.

2. Conjugué d'un nombre complexe :

Définition :

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z = a + ib$, où a et b sont des réels.

On appelle conjugué de z le nombre complexe noté $\overline{z}$ et défini par $\overline{z} = a - ib$.

Propriétés :

Soient z et z' deux nombres complexes

- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$, $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$, $\overline{\left(z^n\right)} = \left(\overline{z}\right)^n$; $n \in \mathbb{N}^*$
- $\overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z'}}$, $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ si $z' \neq 0$.
- $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re}(z)$, $z - \overline{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$ et $z\overline{z} = \left(\operatorname{Re}(z)\right)^2 + \left(\operatorname{Im}(z)\right)^2$.
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = z$
- $z \in i\,\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = -z$.

Remarque :

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ tel que $z = a + ib$, où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ alors

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}.$$

3. Affixe d'un point, affixe d'un vecteur :

Définition :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

L'affixe d'un point $M(a, b)$ est le nombre complexe $z = a + ib$, notée $\operatorname{aff}(M)$ ou z_M et on écrit $z_M = a + ib$.

On dit aussi que le point $M(a, b)$ est l'image de z.

L'affixe d'un vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est le nombre complexe $z = a + ib$ notée $\operatorname{aff}(\vec{w})$ et on écrit $\operatorname{aff}(\vec{w}) = a + ib$.

Remarque :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B, alors :

- $\operatorname{aff}\left(\overrightarrow{AB}\right) = z_B - z_A$
- $I = A * B \Leftrightarrow z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$.

Propriétés :

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et tous réels α et β,

$\operatorname{aff}\left(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}\right) = \alpha\operatorname{aff}\left(\vec{u}\right) + \beta\operatorname{aff}\left(\vec{v}\right)$.

Théorème :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tel que $\vec{v} \neq \vec{0}$.

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ $\dfrac{\operatorname{aff}(\vec{u})}{\operatorname{aff}(\vec{v})}$ est réel.
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow$ $\dfrac{\operatorname{aff}(\vec{u})}{\operatorname{aff}(\vec{v})}$ est imaginaire

4. Module d'un nombre complexe :

Définition :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit $z = a + ib$ et $M(a, b)$ le point d'affixe z.

On appelle module de z le réel positif, noté $|z|$, défini par

$|z| = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Pour tous points A et B d'affixes respectives z_A et z_B,

$AB = |z_B - z_A|$.

Propriétés :

Soit z et z' deux nombres complexes.

- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire)
- $|zz'| = |z||z'|$
- $|z^n| = |z|^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.
- $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$ et $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$ si $z \neq 0$
- $|\overline{z}| = |-z| = |-\overline{z}| = |z|$
- $z\overline{z} = |z|^2$

5. Argument d'un nombre complexe non nul :

Définition :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit z un nombre complexe non nul et M son image.

On appelle argument de z et on note $\arg(z)$ toute mesure de l'angle orienté $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right)$

et on écrit $\arg(z) \equiv \left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}}\right)[2\pi]$.

Remarque :

Soit z un nombre complexe non nul.

- $z \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv 0[\pi]$.
- $z \in i\,\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$.

Propriétés :

Soit z un nombre complexe non nul et k un réel non nul.

- $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)[2\pi]$
- $\arg(-z) \equiv \pi + \arg(z)[2\pi]$
- Si $k > 0$ alors $\arg(kz) \equiv \arg(z)[2\pi]$
- Si $k < 0$ alors $\arg(kz) \equiv \pi + \arg(z)[2\pi]$

6. Ecriture trigonométrique d'un nombre complexe non nul :

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ tel que $\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$

alors $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$

cette écriture est appelée écriture trigonométrique de z.

Théorème :

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ tel que $z = a + ib$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\arg(z) \equiv \theta[2\pi] \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{a}{|z|} \text{ et } \sin\theta = \frac{b}{|z|}.$$

Propriétés des arguments :

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls.

- $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)[2\pi]$
- $\arg\left(\frac{z'}{z}\right) \equiv \arg(z') - \arg(z)[2\pi]$
- $\arg(z^n) \equiv n\arg(z)[2\pi]$, $n \in \mathbb{Z}$.

7. Ecriture exponentielle d'un nombre complexe non nul :

Notation : Pour tout réel θ, on note $e^{i\theta}$ le nombre complexe $\cos\theta + i\sin\theta$.

Ainsi pour tout réel θ, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Conséquences :

- $e^{i0} = 1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$, $e^{i\pi} = -1$.
- Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, $e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}$.
- Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\left|e^{i\theta}\right| = 1$, $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ et $-e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$

Propriétés :

Soient θ et θ' deux réels.

- $e^{i\theta}.e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
- $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
- $\frac{e^{i\theta'}}{e^{i\theta}} = e^{i(\theta'-\theta)}$
- $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Théorème et définition :

Tout nombre complexe non nul z s'écrit sous la forme $z = r\,e^{i\theta}$, où $r = |z|$ et $\theta \equiv \arg(z)[2\pi]$.

L'écriture $z = r\,e^{i\theta}$, $r > 0$ est appelé écriture exponentielle de z.

8. Angles orientés et nombres complexes :

Théorème :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Soient A, B, C et D des points d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D et tels que $AB \neq 0$ et $CD \neq 0$.

- $\left(\vec{u}, \widehat{\overrightarrow{AB}}\right) \equiv \arg(z_B - z_A)[2\pi]$
- $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$

Conséquence :

Si $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = r\,e^{i\theta}$, $r > 0$ alors $\frac{CD}{AB} = r$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}\right) \equiv \theta[2\pi]$

9. Equation $z^n = a$, $a \in \mathbb{C}^*$ et $n \geq 1$:

Théorème :

Pour tout entier naturel non nul n, l'équation $z^n = 1$ admet dans $\mathbb{C}$, n solutions distinctes définies par $z_K = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, avec $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Les solutions de l'équation $z^n = 1$ sont appelées les racines nièmes de l'unité.

Théorème :

Lorsque $n \geq 3$, les points images des racines nièmes de l'unité sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique.

Théorème :

Soit $a \in \mathbb{C}^*$ tel que $a = [r, \theta] = re^{i\theta}$ et un entier $n \geq 1$.

L'équation $z^n = a$ admet dans $\mathbb{C}$, n solutions distinctes définies par $z_k = \sqrt[n]{r}\,e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$, $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$

Ces solutions sont appelées les racines nièmes du nombre complexe a.

Théorème :

Soit $a \in \mathbb{C}^*$ tel que $a = [r, \theta] = r\,e^{i\theta}$.

Lorsque $n \geq 3$, les points images des racines nièmes de a sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{r}$.

10. Equations de degré supérieur ou égal à 2

Recherche des racines carrées par la méthode algébrique :

Soit $a = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}^*$, on pose $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$z^2 = a \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = |a| \\ x^2 - y^2 = \mathrm{Re}(a) \\ 2xy = \mathrm{Im}(a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \\ x^2 - y^2 = \alpha \\ 2xy = \beta \end{cases}$$

Théorème :

Soient a, b et c des nombres complexes tel que $a \neq 0$.
L'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions (éventuellement confondues) définies par :

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}.$$

Théorème :

Si z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$, $a \neq 0$ alors :

- $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$
- $z_1 + z_2 = \frac{-b}{a}$ et $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$

Théorème :

Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des nombres complexes tels que $a_n \neq 0$, $n \geq 2$.

Soit $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$.

Si z_0 est un zéro de P, alors $P(z) = (z - z_0)Q(z)$, où $Q(z)$ est de la forme $Q(z) = a_n z^{n-1} + b_{n-2} z^{n-2} + \ldots + b_0$ avec $b_0, b_1, \ldots, b_{n-2}$ sont des complexes.

12. Nombres complexes et trigonométries :

Théorème :

Pour tout réel x et tout entier n,

$(\cos x + i\sin)^n = \cos(nx) + i\sin(nx)$.

(Formule de Moivre)

Pour tout réel x, $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ et $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$.

(Formules d'Euler).