

# Les équations différentielles

## **EXERCICE 1 :**

On considère les équations différentielles suivantes :

$$(E_0) : y' - 2y = 0 \text{ et } (E) : y' - 2y = e^{2x}$$

- 1) Déterminer les fonctions  $g$  solutions de l'équation  $(E_0)$ .
- 2) Soit la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = a \cdot x \cdot e^{2x} + b$  où  $a$  et  $b$  sont deux réels tels que  $h$  soit solution de l'équation  $(E)$ .  
Déterminer les valeurs de  $a$  et  $b$ .
- 3) Montrer qu'une fonction  $f$  soit solution de l'équation  $(E)$  si et seulement si  $f - h$  est solution de l'équation  $(E_0)$ .
- 4) En déduire la solution  $f$  de l'équation  $(E)$  qui prend la valeur 1 en 0.

## **EXERCICE 2 :**

On désigne par  $(E)$  l'équation différentielle  $y'' = -3y' + 1$

- 1) En posant  $z = y'$ , résoudre l'équation  $(E)$ .
- 2) Déterminer la solution  $f$  de  $(E)$  vérifiant  $f(0) = f'(0) = 0$

## **EXERCICE 3 :**

- 1) Vérifier que la fonction  $u : x \mapsto 2$  est une solution de l'équation différentielle :  
 $y' + 2y = y^2$
- 2) Soit  $E$  l'ensemble des fonctions  $f$  dérivables sur  $\mathbb{R}$ , qui ne s'annulent pas sur  $\mathbb{R}$  et telles que :  $f'(x) + 2f(x) = (f(x))^2$  pour tout réel  $x$ .
  - a) Vérifier que l'ensemble  $E$  est non vide.
  - b) Soit  $f$  une fonction de  $E$ . Montrer que la fonction  $g = \frac{1}{f}$  est une solution d'une équation différentielle de la forme  $y' = ay + b$ , où  $a$  et  $b$  sont deux réels.
  - c) Déterminer alors  $E$ .

## **EXERCICE 4 :**

- 1) Résoudre l'équation différentielle  $(E) : 9y'' + \pi^2 y = 0$ .
- 2) On désigne par  $f$  la solution particulière de l'équation  $(E)$ , dont la courbe représentative selon un repère orthogonal passe par le point  $H(1, -\sqrt{2})$  et admet en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
  - a) Déterminer  $f$ .
  - b) Ecrire  $f(x)$  sous la forme  $r \cdot \cos(ax + b)$  puis vérifier que  $f$  est périodique de période 6.
  - c) Calculer la valeur moyenne de  $f$  sur l'intervalle  $[335, 341]$ .

## **EXERCICE 5 :**

On considère les équations différentielles suivantes  $(E_0) : y'' + 4y = 0$   
et  $(E) : y'' + 4y = 3 \cdot \cos x$

- 1) a) Déterminer la solution  $g$  de  $(E_0)$  telle que  $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$  et  $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ .  
b) Ecrire  $g(x)$  sous la forme  $r \cdot \sin(2x - \alpha)$  où  $\alpha$  est un réel.
- 2) Vérifier que la fonction  $h : x \mapsto \cos x$  est solution de  $(E)$ .

- 3) Vérifier que la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = g(x) + h(x)$  est une solution de  $(E)$ .
- 4) Montrer qu'une fonction  $p$  soit solution de  $(E)$  si et seulement si  $p - h$  est solution de  $(E_0)$ .
- 5) En déduire la fonction  $p$  solution de  $(E)$  telle que  $p(\frac{\pi}{2}) = -1$  et  $p'(\frac{\pi}{2}) = 1$

### **EXERCICE 6 :**

- 1) Résoudre l'équation différentielle :  $y'' + y = 0$
- 2) Soit  $E$  l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur  $\mathbb{R}$  telles que :
 
$$f'(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$$
  - a) Vérifier que la fonction  $g : x \mapsto \cos x$  est un élément de  $E$ .
  - b) Soit  $f$  un élément de  $E$ . Vérifier que pour tout réel  $x$ ,  $f''(x) = f'\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
  - c) En déduire que si  $f$  est un élément de  $E$ , alors  $f$  est une solution de l'équation différentielle :  $y'' + y = 0$
  - d) Déterminer alors l'ensemble  $E$ .

### **EXERCICE 7 :**

On considère les équations différentielles :

$$(E_0): (1 + e^x)y' - y = 0 \quad \text{et} \quad (E): (1 + e^x)y' - y = e^{2x}$$

- 1) Soit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^x}$  Montrer que  $g$  est une solution de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$ .
- 2) Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$ .  
Montrer que  $f$  est une solution de  $(E)$  si et seulement si  $(f - g)$  est une solution de  $(E_0)$ .
- 3) On pose  $z = (1 + e^x)y$ 
  - a) Montrer que si  $y$  est une solution de  $(E_0)$  sur  $\mathbb{R}$  alors  $z$  est une solution d'une équation différentielle  $(E')$  que l'on précisera.
  - b) En déduire que les solutions de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$  sont les fonctions  $f$  définies par :  $f(x) = \frac{ke^x + e^{2x}}{1+e^x}$  ;  $k \in \mathbb{R}$ .
- 4) Soit la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{e^{2x} - 3e^x}{1+e^x}$  Etudier les variations de  $f$ .
- 5) Soit  $h$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $[0, +\infty[$ .
  - a) Montrer que  $h$  réalise une bijection de  $[0, +\infty[$  sur un intervalle  $J$  que l'on précisera.
  - b) Soit  $h^{-1}$  la fonction réciproque de  $h$ , expliciter  $h^{-1}(x)$  pour tout  $x \in J$ .
- 6) a) Tracer dans le même repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  les courbes de  $f$  et de  $h^{-1}$ .  
b) Calculer  $\int_{-1}^0 \ln\left(3 + x + \sqrt{x^2 + 10x + 9}\right) dx$

## EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

### I. EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DE TYPE : $y' = ay + b$

#### THÉORÈME

Soit  $a$  un réel non nul. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle  $y' = ay$  est l'ensemble des fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par :  $x \mapsto ke^{ax}$  où  $k$  est une constante

#### THÉORÈME

Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a$  non nul. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle  $y' = ay + b$  est l'ensemble des fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par :  $x \mapsto ke^{ax} - \frac{b}{a}$  où  $k$  est une constante réelle.

#### CONSÉQUENCE

Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a$  non nul. Pour tous réels  $x_0$  et  $y_0$ , l'équation différentielle  $y' = ay + b$  admet une unique solution qui prend la valeur  $y_0$  en  $x_0$  c'est la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \left(y_0 + \frac{b}{a}\right)e^{a(x-x_0)} - \frac{b}{a}$

### II. EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DE TYPE : $y'' + w^2y = 0$

#### THÉORÈME

Soit  $w$  un réel non nul. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle  $y'' + w^2y = 0$  est l'ensemble des fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = a \cos(wx) + b \sin(wx)$  où  $a$  et  $b$  sont des réels quelconques.

#### CONSÉQUENCES

Soit  $w$  un réel non nul et  $x_0, y_0$  deux réels. L'équation différentielle  $y'' + w^2y = 0$  admet une unique solution dans  $\mathbb{R}$  vérifiant  $f(0) = x_0$  et  $f'(0) = y_0$ . C'est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \frac{y_0}{w} \sin(wx) + x_0 \cos(wx)$$