Sujet n°5

EXERCICE 1 :

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on donne les points A et B d'affixes respectives -1 et i. Soit f : $\begin{array}{l} P \to P \\ M(z) \mapsto M'(z') \end{array}$ tel que $z' = (1+i)z + i$

1. (a) Déterminer la nature de **f** et préciser ses éléments caractéristiques.
   (b) Soit M un point distinct de A. Montrer que AMM' est rectangle isocèle en M.

2. On pose $M_0 = 0$ et on pose pour tout n de $\mathbb{N}$, $M_{n+1} = f(M_n)$. On désigne par z_n l'affixe de M_n.

   (a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $z_n = (1+i)^n - 1$.

   (b) Montrer l'équivalence O, A, M_n sont alignés $\Leftrightarrow$ n est un multiple de 4.

EXERCICE 2 :

Le plan est rapporté à un repère-orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

Soit f la similitude in directe qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = -2i\bar{z} + 2i + 1$

où $\bar{z}$ désigne le conjugué de z.

1. Déterminer le rapport de f.
2. a) Montrer que **f** admet un seul point invariant, on le note I. Calculer son affixe.
   b) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\overline{IM'} = 2\overline{IM}$. En déduire une équation de l'axe de **f**.
3. On pose M_0 le point d'affixe 2 et on pose pour tout n de $\mathbb{N}$, $M_{n+1} = f(M_n)$. On désigne par z_n l'affixe de M_n.
   (a) Caractériser **fof**.
   (b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $Z_{2n} = 4^n + 1$ et $Z_{2n+1} = 1 - 2 \times 4^n i$.

EXERCICE 3 : (Bac 2016)

A) On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$.

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.

2) a) Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}}{2 \times \sqrt{x}}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Tracer la courbe (C_f).

3) Soit λ un réel de $]0,1[$. On désigne par S_λ l'aire de la partie du plan limitée par (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=\lambda$ et $x=1$.

Calculer S_λ en fonction de λ et déterminer $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} S_\lambda$.

B) 1) Soit g_1 et g_2 les restrictions de f respectivement à chacun des intervalles $]0,1]$ et $[1,+\infty[$.

Montrer que g_1 réalise une bijection de $]0,1]$ sur un intervalle I que l'on déterminera et que g_2 réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur l'intervalle I.

2) Soit n un entier naturel non nul.

a) Montrer que l'équation $f(x) = e + \dfrac{1}{n}$ admet dans $]0,+\infty[$ exactement deux solutions notées α_n et β_n telles que $0 < \alpha_n < 1 < \beta_n$.

On définit ainsi, pour tout entier naturel non nul n, deux suites réelles (α_n) et (β_n).

b) Montrer que les suites (α_n) et (β_n) sont convergentes et déterminer leur limite.

3) On considère la fonction h définie sur $[0,+\infty[$ par $h(x) = \begin{cases} \sqrt{x}\left(f(x)-(e+\dfrac{1}{n})\right) & \text{si } x>0 \\ 1 & \text{si } x=0. \end{cases}$

On note (C_h) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Montrer que h est continue à droite en 0.

b) Déterminer le signe de $h(x)$ pour tout $x \in [0,+\infty[$.

4) Soit H la primitive de h sur $[0,+\infty[$ qui s'annule en 0.

a) Justifier que les fonctions $u : x \mapsto \int_0^x e^{\sqrt{t}}dt$ et $v : x \mapsto 2+2(\sqrt{x}-1)\,e^{\sqrt{x}}$ sont continues sur $[0,+\infty[$ et dérivables sur $]0,+\infty[$.

b) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $u(x)=v(x)$.

c) Donner l'expression de $H(x)$ pour tout $x \in [0,+\infty[$.

5) Soit $\mathcal{A}_n$ l'aire de la partie du plan limitée par (C_h), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=\beta_n$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{A}_n = 2-\dfrac{2}{3}e$.