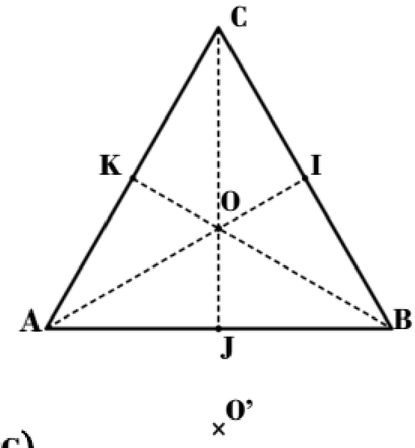
Sujet n°3

EXERCICE 1 :



Dans la figure ci-contre :

- **ABC est un triangle équilatéral de centre O, tel que** $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.
- **I, J et K sont les milieux respectifs de** $[BC]$, $[AB]$ **et** $[AC]$.
- $O' = S_{(AB)}(O)$.

1) Montrer que BOAO' est un losange de centre J et que $(BO') \perp (BC)$.

2) a) Montrer qu'il existe un seul déplacement φ **vérifiant** $\varphi(B) = C$ **et** $\varphi(O') = O$.

b) Préciser l'angle de φ **. En déduire que** φ **est une rotation dont on précisera le centre.**

3) Soit $g = t_{\overrightarrow{CB}} \circ \varphi$.

a) Vérifier que $\varphi = S_{(AI)} \circ S_{(AB)}$.

b) En déduire que g est une rotation dont on précisera l'angle et le centre.

4) Soit ψ **l'antidéplacement tel que** $\psi(B) = C$ **et** $\psi(O') = O$

a) Monter que ψ **est une symétrie glissante d'axe** (IJ) .

b) Déterminer $S_{(IJ)}(B)$**. En déduire le vecteur de** $\vec{u}$ **de** ψ .

5) Soit Ω **l'intersection de** (BK) **et** (IJ)**. On pose** $h = S_\Omega \circ \psi$

a) Déterminer $h(J)$**. En déduire que h est une symétrie orthogonale.**

b) Vérifier que $S_\Omega = S_{(BK)} \circ S_{(IJ)}$ **. En déduire que :** $h = S_{(BK)} \circ t_{\overrightarrow{JI}}$

c) Déterminer l'axe de h.

EXERCICE 2 :

Le plan étant orienté dans le sens direct. Soit ABC un triangle rectangle direct en A tel que AC= 2.AB . Soit I le milieu de [AC].

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui envoie A en I et B en C.

b) Montrer que f est une rotation dont on précisera l'angle. Construire son centre Ω.

2) Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et $g = f o\, R^{-1}$

Déterminer g(A). En déduire que $f = t_{\overrightarrow{AI}}$ o R

3) Soit E= R(I) et F le point tel que AEFI soit un carré. (Construire E et F)

a) Caractériser l'application fof.

b) Déterminer fof(A). En déduire que Ω =A*F

4) a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement h qui envoie A en F et E en I.

b) Montrer que h est une symétrie glissante dont on déterminera l'axe et le vecteur. (On donne K le milieu de [FI] et J milieu de [FE])

EXERCICE 3 : (Bac 2017)

Le plan est orienté.

Dans la figure 1 de l'annexe 1 jointe,

ABC est un triangle équilatéral tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$,

Ω est un point intérieur au triangle ABC tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Omega}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$,

I et J sont les projetés orthogonaux de Ω respectivement sur les droites (AB) et (AC),

D est le point de la droite (AC) tel que $DA = D\Omega$.

1) Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega J}, \overrightarrow{\Omega D}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

2) Soit $R = S_{(\Omega D)} \circ S_{(\Omega J)}$.

a) Justifier que R est la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

b) Soit $F = R(J)$.

Montrer que F est un point de la demi-droite $[\Omega I)$. Construire le point F.

3) Soit h l'homothétie de centre Ω et telle que $h(F) = I$. On pose $f = h \circ R$.

a) Vérifier que $f(J) = I$.

b) Montrer que f est une similitude directe dont on précisera le centre et l'angle.

c) Calculer $\frac{\Omega I}{\Omega A}$ et $\frac{\Omega A}{\Omega J}$. $\left(\text{On donne } \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)$.

En déduire que le rapport de f est égal à $1+\sqrt{3}$.

4) Soit g la similitude indirecte de centre Ω telle que $g(J) = I$.

a) Montrer que $g = f \circ S_{(\Omega J)}$.

b) Déterminer le rapport de g.

c) Montrer que l'axe de g est la droite (ΩD).

d) Montrer que $g = h \circ S_{(\Omega D)}$.

e) La droite (ΩD) coupe la droite (BC) en un point K. On pose $K' = g(K)$.

Vérifier que $h(K) = K'$. Construire alors le point K'.

EXERCICE 4 :

1) Soit I un point quelconque du plan, alors l'homothétie h(I,-3) est une :

a) similitude indirecte de rapport 3

b) similitude directe de rapport 3 et d'angle π

c) similitude directe de rapport 3 et d'angle nul

2) Soit I et J deux points distincts du plan. L'application h(I,3)oh(J, $\frac{1}{3}$) est :

a) une translation **b)** une homothétie **c)** l'identité

3) Soit Ω un point quelconque du plan. L'application r(Ω , $\frac{\pi}{3}$)oh(Ω ,-3) est une similitude directe dont la forme réduite est :

a) r(Ω , $\frac{\pi}{3}$)oh(Ω ,3) **b)** r(Ω , $-\frac{\pi}{3}$)oh(Ω ,3) **c)** r(Ω ,- $\frac{2\pi}{3}$)oh(Ω ,3)

4) Soit f la similitude indirecte de centre I, de rapport 3 et d'axe Δ. L'application fof est :

a) la similitude indirecte de centre I, de rapport 9 **b)** l'homothétie h(I , 9) **c)** la similitude directe S(I,9, π) d'axe Δ

5) soit f la similitude indirecte dont la forme complexe est z'=2i$\overline{z}$, alors une équation de son axe est :

a) $y = x + 1$ **b)** $y = -x$ **c)** $y = x$

6) L'image par une similitude de rapport $\frac{1}{2}$ d'un triangle d'aire $\mathcal{A}$ est un triangle dont l'aire est égale :

a) $\mathcal{A}$ **b)** $4.\mathcal{A}$ **c)** $\frac{1}{4}.\mathcal{A}$