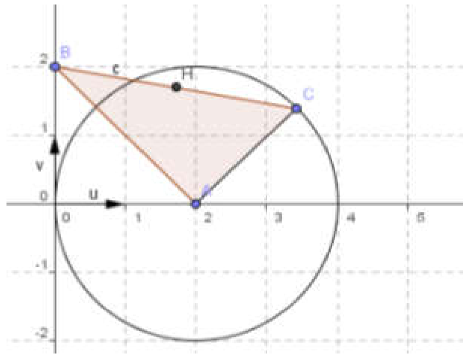
Sujet n°1

EXERCICE 1 :



Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit les points A et B d'affixes respectifs $z_A = 2$ et $z_B = 2i$. On désigne par $\mathcal{C}$ le cercle de centre A et de rayon 2.
Soit le point C du cercle $\mathcal{C}$ d'affixe z_C tel que le triangle ABC soit rectangle en A.
Le point H étant le milieu de [BC].

1) a) Déterminer graphiquement $|z_C - z_A|$ et $\arg(z_C - z_A)$
   b) En déduire que $z_C = 2\left(1 + e^{i\frac{\pi}{4}}\right)$
   c) Donner alors la forme exponentielle de z_C.
2) Montrer que $z_H = (1+\sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{4}}$ puis calculer OH.
3) Soit le point M du plan d'affixe $z_M = 2 + 2e^{i\theta}$ où $\theta \in [0, \pi]$
   a) Déterminer l'ensemble des points M du plan quand θ décrit $[0, \pi]$.
   b) Déterminer la valeur de θ pour laquelle $(AM) \perp (OC)$

EXERCICE 2 :

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points A, B et C d'affixes respectifs a= $\sqrt{3} + i$, b= $i\sqrt{3} - 1$ et c=a+b.

1) a) Montrer que les points A et B appartiennent à un même cercle $\mathcal{C}$ de centre O dont on précisera le rayon.
   b) Construire alors les points A, B et C.
2) Ecrire chacun des complexes a et b sous forme exponentielle.
3) a) Montrer que OACB est un carré.
   b) En déduire la forme exponentielle de c.
   c) Calculer alors $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$
4) a) Déterminer sous la forme exponentielle les racines cinquièmes c_0, c_1, c_2, c_3 et c_4 du nombre complexe c.
   b) Montrer que $1 + e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{i\frac{4\pi}{5}} + e^{i\frac{6\pi}{5}} + e^{i\frac{8\pi}{5}} = 0$
   c) En déduire que $c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 0$

EXERCICE 3 :

Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit les points A(1) et B($-2i$). Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M(z) dans chacun des cas suivants :

1) $|iz-2| = |\overline{z}-1|$ 2) $\left|\frac{z+2i}{z-1}\right| = 2$ 3) $\frac{z+2i}{z-1} < 0$ 4) $\frac{iz-2}{z-1} \in IR$

5) $arg\left(\frac{z+2i}{z-1}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ 6) $\overline{z} = 2i + 3e^{i2\theta}$ tel que θ décrit $[0,\pi]$

EXERCICE 4 : (Bac 2011)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère le point A d'affixe (-1) et les points M, N et P d'affixes respectives z, z^2 et z^3 où $z \in \mathbb{C}\setminus\{-1,1\}$.

1) a) Montrer que (le triangle MNP est rectangle en P) si et seulement si ($\frac{1+z}{z}$ est imaginaire pur).

b) On pose z= $x+iy$ où $(x,y) \in IR^2$. Montrer que $\frac{1+z}{z} = \frac{x^2+y^2+x-iy}{x^2+y^2}$

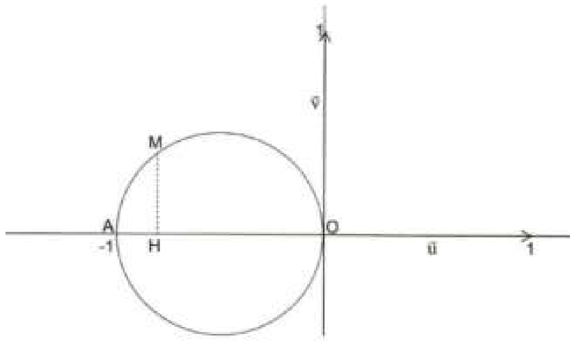
c) En déduire que l'ensemble des points M tels que le triangle MNP soit rectangle en P est le cercle (Γ) de diamètre [OA], privé des points O et A.

2) Dans la figure ci-dessous on a tracé le cercle (Γ) et on a placé un point M d'affixe z sur (Γ) et son projeté orthogonal H sur l'axe $(O, \vec{u})$. On se propose de construire les points N et P d'affixes respectives z^2 et z^3 tels que le triangle MNP soit rectangle en P.

a) Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}}) \equiv \left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}}\right)[2\pi]$ et que $(\widehat{\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OP}}) \equiv \left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}}\right)[2\pi]$

b) Montrer que $OH = OM^2$

c) Donner un procédé de construction des points N et P puis les construire.



EXERCICE 5 :

1) θ étant un réel de l'intervalle$]0,\frac{\pi}{2}[$.

On considère l'équation (E) : $z^2 - 2e^{i\theta}cos\theta\, z + e^{2i\theta} = 0$

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E') :

$i(\overline{z})^4 - 2e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})}cos\theta\, \overline{z}^2 + e^{2i\theta} = 0$

2) Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On donne les points A et B d'affixes respectifs 1 et $e^{2i\theta}$

a) Déterminer l'affixe du point C tel que le quadrilatère OACB soit un parallélogramme, puis vérifier que OACB est un losange.

b) Déterminer le réel θ pour que l'aire $\mathcal{A}$ du losange OACB soit égale à $\frac{1}{2}$