

**Exercice n°1 : ( 7 points )**

Une urne contient huit jetons indiscernables au toucher répartis comme suit :

- **Quatre** blancs numérotés 1 ; 1 ; 2 ; 2
- **Trois** noirs numérotés 1 ; 1 ; 2
- **Un** jaune numéroté -1

Une épreuve consiste à tirer simultanément et au hasard deux jetons de l'urne.

1) Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

A : « Obtenir deux jetons de même couleur ».

B : « Obtenir deux jetons dont le produit des numéros est négatif ».

2) Montrer que  $p(A \cup B) = \frac{4}{7}$

3) Soit X l'aléa numérique qui à chaque épreuve associe le produit des deux numéros inscrits sur les jetons tirés.

a- Vérifier que  $p(X = -1) = \frac{1}{7}$ .

b- Compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X.

$X_i$	-2	-1	1	2	4
$p(X=X_i)$		$\frac{1}{7}$			

c- Calculer l'espérance mathématique de X.

**Exercice n°2 : ( 6 points )**

Soit  $(V_n)$  la suite géométrique de premier terme  $V_0 = \frac{1}{6}$  et de raison  $\frac{1}{4}$ .

1) a) Exprimer  $V_n$  en fonction de n .

b) Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$ .

2) Soit  $(U_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par : 
$$\begin{cases} U_0 = -\frac{23}{6} \\ U_{n+1} = \frac{1}{4}U_n - 3 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

a) Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n > -4$ .

b) Vérifier que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_{n+1} - U_n = -\frac{3}{4}(4 + U_n)$ .

- c) En déduire que la suite  $(U_n)$  est décroissante et qu'elle est convergente.
- 3) a) Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $V_n - U_n = 4$ .
- b) En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ .

**Exercice n°3 : ( 7 points )**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$ , par :  $f(x) = \log(x) - \frac{3}{x}$ . on désigne par  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $((O, \vec{i}, \vec{j}))$ .

- 1) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ . Interpréter graphiquement le résultat.
- 2) a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$   
 b) En déduire la nature de la branche infinie de la courbe  $(C)$  au voisinage  $+\infty$
- 3) a) Montrer que pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ;  $f'(x) = \frac{x+3}{x^2}$   
 b) dresser alors le tableau de variation de  $f$
- 4) a) Montrer que l'équation :  $f(x) = 0$ ; admet une unique solution  $\alpha \in ]0, +\infty[$ .  
 b) Justifier que :  $2,8 < \alpha < 2,9$ .
- 5) Tracer la courbe  $(C)$ .
- 6) Soit  $F$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$ , par  $F(x) = (x-3)\log(x) - x$   
 a) Calculer  $F(3)$ .  
 b) Montrer que  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $]0, +\infty[$ .  
 c) En déduire l'aire de la partie limitée par la courbe  $(C)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations :  $x = \alpha$  et  $x = 3$ .