Les équations différentielles

Séance 4

EXERCICE 1 :

On considère les équations différentielles suivantes :

(E_0) : $y' - 2y = 0$ et (E) : $y' - 2y = e^{2x}$

1) Déterminer les fonctions g solutions de l'équation (E_0).
2) Soit la fonction h définie sur IR par $h(x) = a.x.e^{2x} + b$ où a et b sont deux réels tels que h soit solution de l'équation (E).
   Déterminer les valeurs de a et b.
3) Montrer qu'une fonction f soit solution de l'équation (E) si et seulement si $f - h$ est solution de l'équation (E_0).
4) En déduire la solution f de l'équation (E) qui prend la valeur 1 en 0.

EXERCICE 2 :

On désigne par (E) l'équation différentielle $y'' = -3y' + 1$

1) En posant $z = y'$, résoudre l'équation (E).
2) Déterminer la solution f de (E) vérifiant $f(0) = f'(0) = 0$

EXERCICE 3 :

1) Vérifier que la fonction $u : x \longmapsto 2$ est une solution de l'équation différentielle :
   $y' + 2y = y^2$
2) Soit E l'ensemble des fonctions f dérivables sur IR, qui ne s'annulent pas sur IR et telles que : $f'(x) + 2f(x) = (f(x))^2$ pour tout réel x.
   a) Vérifier que l'ensemble E est non vide.
   b) Soit f une fonction de E. Montrer que la fonction $g = \frac{1}{f}$ est une solution d'une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$, où a et b sont deux réels.
   c) Déterminer alors E.

EXERCICE 4 :

1) Résoudre l'équation différentielle (E) : $9y'' + \pi^2 y = 0$.
2) On désigne par f la solution particulière de l'équation (E), dont la courbe représentative selon un repère orthogonal passe par le point $H(1,-\sqrt{2})$ et admet en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
   a) Déterminer f .
   b) Ecrire f(x) sous la forme $r.cos(ax + b)$ puis vérifier que f est périodique de période 6.
   c) Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle [335,341].

EXERCICE 5 :

On considère les équations différentielles suivantes (E_0) : $y'' + 4y = 0$ et (E) : $y'' + 4y = 3.cosx$

1) a) Déterminer la solution g de (E_0) telle que $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ et $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.
   b) Ecrire $g(x)$ sous la forme $r.sin(2x - \alpha)$ où α est un réel.
2) Vérifier que la fonction $h : x \longmapsto cosx$ est solution de (E).

3) Vérifier que la fonction f définie sur IR par $f(x) = g(x) + h(x)$ est une solution de (E).

4) Montrer qu'une fonction p soit solution de (E) si et seulement si $p - h$ est solution de (E_0).

5) En déduire la fonction p solution de (E) telle que $p(\frac{\pi}{2}) = -1$ et $p'(\frac{\pi}{2}) = 1$

EXERCICE 6 :

1) Résoudre l'équation différentielle : $y'' + y = 0$

2) Soit E l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur IR telles que :

$f'(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$

a) Vérifier que la fonction $g : x \longmapsto cosx$ est un élément de E.

b) Soit f un élément de E. Vérifier que pour tout réel x, $f''(x) = f'\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

c) En déduire que si f est un élément de E, alors f est une solution de l'équation différentielle : $y'' + y = 0$

d) Déterminer alors l'ensemble E.

EXERCICE 7 :

On considère les équations différentielles :

$(E_0): (1 + e^x)y' - y = 0$ et $(E): (1 + e^x)y' - y = e^{2x}$

1) Soit la fonction g définie sur IR par : $g(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^x}$ Montrer que g est une solution de (E) sur IR.

2) Soit f une fonction dérivable sur IR.

Montrer que f est une solution de (E) si est seulement si $(f - g)$ est une solution de (E_0).

3) On pose $z = (1 + e^x)y$

a) Montrer que si y est une solution de (E_0) sur IR alors z est une solution d'une équation différentielle (E') que l'on précisera.

b) En déduire que les solutions de (E) sur IR sont les fonctions f définies par : $f(x) = \frac{ke^x + e^{2x}}{1+e^x}$; $k \in IR$.

4) Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{e^{2x} - 3e^x}{1+e^x}$ Etudier les variations de f.

5) Soit h la restriction de f à l'intervalle $[0\,,+\infty[$.

a) Montrer que h réalise une bijection de $[0\,,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Soit h^{-1} la fonction réciproque de h, expliciter $h^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

6) a) Tracer dans le même repère orthonormé $(O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$ les courbes de f et de h^{-1}.

b) Calculer $\int_{-1}^{0} \ln\left(3 + x + \sqrt{x^2 + 10x + 9}\right) dx$

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

I. EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DE TYPE : $y' = ay + b$

THÉORÈME

Soit a un réel non nul. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $\boldsymbol{y' = ay}$ *est l'ensemble des fonctions définies sur IR par :* $x \mapsto ke^{ax}$ *où k est une constante*

THÉORÈME

Soit a et b deux réels tels que a non nul. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $\boldsymbol{y' = ay + b}$ *est l'ensemble des fonctions définies sur IR par :* $x \mapsto ke^{ax} - \dfrac{b}{a}$ *où k est une constante réelle.*

CONSÉQUENCE

Soit a et b deux réels tels que a non nul. Pour tous réels x_0 et y_0, l'équation différentielle $\boldsymbol{y' = ay + b}$ *admet une unique solution qui prend la valeur* $\boldsymbol{y_0}$ *en* $\boldsymbol{x_0}$ *c'est la fonction f définie sur IR par :* $f(x) = \left(y_0 + \dfrac{b}{a}\right)e^{a(x-x_0)} - \dfrac{b}{a}$

II. EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DE TYPE : $y'' + w^2y = 0$

THÉORÈME

Soit w un réel non nul. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $\boldsymbol{y'' + w^2 y = 0}$ *est l'ensemble des fonctions définies sur IR par :*
$f(x) = a\cos(wx) + b\sin(wx)$ *où a et b sont des réels quelconques.*

CONSÉQUENCES

Soit w un réel non nul et x_0, y_0 deux réels. L'équation différentielle $\boldsymbol{y'' + w^2 y = 0}$ *admet une unique solution dans IR vérifiant $f(0) = x_0$ et $f'(0) = y_0$*
C'est la fonction définie sur IR par :

$$f(x) = \frac{y_0}{w}\sin(wx) + x_0\cos(wx)$$