

EXERCICE 1 :x

Calculer chacune des intégrales suivantes :

$$\int_0^1 (x^2 + \frac{2}{x^2}) dx \quad ; \quad \int_2^3 dt \quad ; \quad \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad ; \quad \int_1^2 \frac{t}{(t^2+1)^2} dt \quad ; \quad \int_0^1 x(3x^2 + 2)^4 dx \quad ;$$

$$\int_0^1 \sqrt{2x+1} dx \quad ; \quad \int_1^4 (x+2)\sqrt{x} dx \quad ; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x (\sin 2x)^4 dx \quad ; \quad \int_0^{\pi} (\cos x)^3 dx \quad ;$$

$$\int_0^{\pi} (\cos x)^4 dx \quad ; \quad \int_0^{\pi} x \cdot \sin^2 x \cdot dx \quad \text{et} \quad \int_0^{\pi} x^2 \sin 2x \cdot dx$$

EXERCICE 2 :x

Soit la fonction numérique F définie sur IR par : $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$

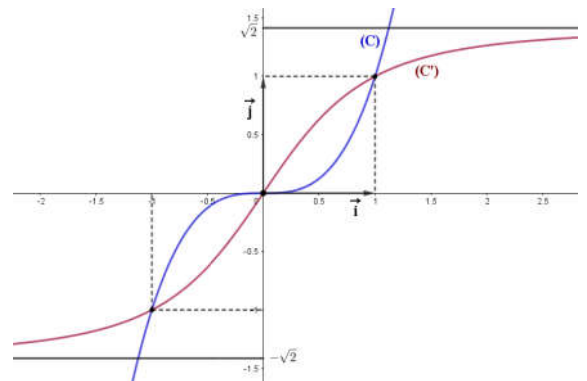
- 1) a) Montrer que F est strictement croissante sur IR.
 b) Montrer que $\varphi : x \mapsto F(x) + F(-x)$ est constante sur IR. En déduire que F est impaire.
- 2) On pose $g(x) = \int_0^{\tan x} \frac{dt}{1+t^2} \quad ; \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$
 - a) Montrer que g est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et calculer $g'(x)$.
 - b) Calculer $g(0)$. En déduire que $g(x) = x$
 - c) Calculer $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$ et $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2}$

EXERCICE 3 :x

Soit les fonctions $f : x \mapsto x^3$ et $g : x \mapsto \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}}$

On désigne par (C) et par (C') les courbes représentatives respectivement de f et de g dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . (Voir la figure)

- 1) Calculer en (u.a) l'aire \mathcal{A} de la partie du plan limitée par (C), l'axe (O, \vec{i}) et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$.
- 2) Calculer en (u.a) l'aire \mathcal{A}' de la partie du plan limitée par la courbe (C'), l'axe (O, \vec{j}) et la droite d'équation $y = 1$.
- 3) Calculer en (u.a) l'aire \mathcal{A}'' de la partie du plan limitée par (C), (C') et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$.



EXERCICE 4 :x

On pose pour tout entier naturel n, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+2} x \, dx$

- 1) a) Calculer I_0 .
 b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante. En déduire qu'elle est convergente.
- 2) Montrer que pour tout n, on a : $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+3}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$
- 3) Calculer les termes I_2 et I_4 .

EXERCICE 5 :x

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{x^2+1}} dx$

- 1) Calculer I_0
- 2) a) Montrer que la suite (I_n) est décroissante. En déduire qu'elle est convergente
b) Montrer que $\forall x \in [0,1]$, $0 \leq \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{x^2+1}} \leq x^{2n+1}$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n+2}$
c) Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

EXERCICE 6 :

- 1) Calculer à l'aide d'intégration par parties chacune des intégrales suivantes :

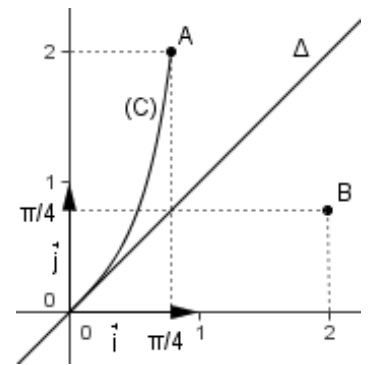
$$I = \int_0^\pi x \cdot \sin x \cdot dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^\pi x^2 \sin x \cdot dx$$

- 2) Soit $K = \int_0^\pi \cos 2x \sin 3x dx$

- a) Montrer à l'aide de deux intégrations par parties successives que $K = \frac{2}{3} + \frac{4}{9}K$
b) En déduire la valeur de K .

EXERCICE 7 :

La courbe représentative (C) ci-contre est celle de la fonction f définie sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ par : $f(x) = (\tan x)^3 + \tan x$. La courbe (C) admet au point O une demi-tangente à droite portée par la droite $\Delta : y = x$.



- 1) Calculer $\int_0^{\pi/4} f(x) dx$

- 2) a) Montrer que f admet une fonction réciproque (notée f^{-1}) dont on précisera le domaine de définition J.
b) Tracer la courbe (C') de la fonction f^{-1} .
c) Calculer $\int_0^2 f^{-1}(x) dx$

- 3) Calculer en (u.a) l'aire \mathcal{A} de la partie du plan limitée par (C) et (C') et le segment [AB].

EXERCICE 8 :

Soit F la fonction définie sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ par $F(x) = \int_1^{\tan^2 x} \frac{dt}{\sqrt{t}(t+1)}$

- 1) Montrer que F est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a : $F'(x) = 2$
- 2) Calculer $F(\frac{\pi}{4})$. En déduire que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a : $F(x) = 2x - \frac{\pi}{2}$
- 3) a) Calculer alors $I = \int_1^3 \frac{dt}{\sqrt{t}(t+1)}$
b) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $J = \int_1^3 \frac{\sqrt{t}}{(t+1)^2} dt$

EXERCICE 9 :

Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N}^* par : $u_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx$

- 1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$
- 2) a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$u_{n+2} = \frac{1}{3} \int_0^1 x^n (1-x^2) \sqrt{1-x^2} dx$$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_{n+2} = \frac{n+1}{n+4} u_n$
c) Calculer alors $\int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx$ et $\int_0^1 x^5 \sqrt{1-x^2} dx$