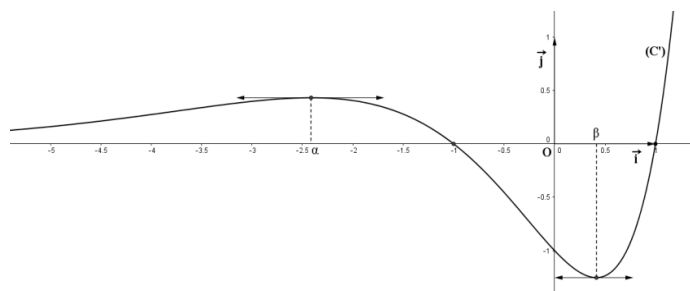


EXERCICE 1 :

Dans la figure ci-contre, on a représenté dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) la courbe (C') de la fonction f' dérivée de la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = (ax + b)^2 \cdot e^x, \text{ où } a > 0 \text{ et } b < 0.$$

La courbe (C') admet une asymptote d'équation : $y = 0$ au voisinage de $(-\infty)$ et une branche parabolique au voisinage de $(+\infty)$ de direction celle de l'axe (O, \vec{j}) .



I/ 1) A l'aide des valeurs graphiques de $f'(0)$ et $f'(-1)$, montrer que $a = 1$ et $b = -1$

2) Par une lecture graphique :

- a) Dresser le tableau de variation de f
- b) Montrer que la courbe (C) de f admet deux points d'inflexion A et B.

II/ 1) Prouver que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. En déduire une interprétation géométrique.

2) Vérifier que $f(x) - f'(x) = (2 - 2x)e^x$. En déduire la position de (C) par rapport à (C') .

3) Tracer (C) dans le même repère (O, \vec{i}, \vec{j}) . (On prend $\alpha = -1 - \sqrt{2}$ et $\beta = -1 + \sqrt{2}$)

III/ Calculer en $(u.a)$ l'aire \mathcal{A}' de la partie du plan limitée par les courbes $(C), (C')$ et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 1$.

EXERCICE 2:

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{4e^x}{e^x + 1}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . (On prend comme unité graphique 1cm)

- 1) Etablir le tableau de variation de f .
- 2) a) Montrer que le point $I(0,2)$ est un centre de symétrie de (C) .
b) Ecrire une équation de la tangente T à (C) au point I .
- 3) a) Vérifier que $(e^x + 1)^2 \geq 4e^x$. En déduire que $f'(x) \leq 1$
b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans \mathbb{R} et que $3,5 < \alpha < 4$
- 4) Tracer $\Delta : y = x$, (C) et T .
- 5) a) Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} sur un intervalle K que l'on précisera.
b) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in K$.
c) Tracer dans le même repère (O, \vec{i}, \vec{j}) la courbe (C') de f^{-1} .
- 6) Calculer en fonction de α , l'intégrale $I = \int_2^\alpha (x - f^{-1}(x)) dx$

EXERCICE 3:

Soit la fonction $f : x \mapsto e^{-x} \ln(1 + e^x)$ et $I_\alpha = \int_0^\alpha f(x) \cdot dx$ pour tout $\alpha > 0$

- 1) Montrer que $I_\alpha \geq 0$ pour tout $\alpha > 0$.
- 2) a) Montrer que $f'(x) + f(x) = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$
b) En déduire I_α en fonction de α . Calculer alors $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} I_\alpha$

EXERCICE 4:

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $u_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x) dx$ et $v_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^n}{n+1}$

1) a) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $0 \leq u_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$ puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

b) Calculer $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx$ puis calculer u_1 .

2) a) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x} dx = \frac{1}{n+2} - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$

b) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $v_n = \ln 2 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$

c) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $|v_n - \ln 2| \leq \frac{1}{n+2}$. Puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

3) a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $u_n = \frac{\ln 2}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n+1} (\ln 2 - v_n)$

b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)u_n$

EXERCICE 5:

1) Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = 1 + x - x \ln x$.

a) Etudier les variations de g .

b) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution x_0 dans $]0, +\infty[$.

Vérifier que $3,5 < x_0 < 3,6$.

c) En déduire le signe de g .

2) Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \frac{g(x^2)}{x(1+x^2)^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f .

c) Vérifier que $f(\sqrt{x_0}) = \frac{1}{2x_0}$.

d) Tracer la courbe (C). (On prendra $x_0 \approx 3,6$)

3) Soit (a_n) la suite définie sur \mathbb{N}^* par $a_n = \int_1^{\frac{1}{n}} f(t) dt$.

a) Montrer que la suite (a_n) est croissante.

b) Montrer que pour tout x de l'intervalle $]0, 1[$, $\ln x \leq f(x) \leq \frac{1}{2} \ln x$.

c) En déduire que $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1 + \ln n}{n} \right) \leq a_n \leq 1 - \frac{1 + \ln n}{n}$.

d) Montrer alors que la suite (a_n) est convergente et que sa limite appartient à l'intervalle $[\frac{1}{2}, 1]$.