Les coniques
Logarithme népérien

Séance 1

EXERCICE 1 :

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

On considère l'ellipse $(\mathcal{E})$ d'équation : $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$. Soit le point $M(\cos\theta, 2\sin\theta)$, où $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

1) a) Déterminer par leurs coordonnées, les sommets et les foyers de $(\mathcal{E})$.
   b) Tracer $(\mathcal{E})$ et placer ses foyers.
   c) Vérifier que le point M appartient à $(\mathcal{E})$.
2) Soit (T) la tangente à $(\mathcal{E})$ en M.
   Montrer qu'une équation de (T) est $2x\cos\theta + y\sin\theta - 2 = 0$
3) On désigne par P et Q les points d'intersection de (T) et les axes du repère et on désigne par $\mathcal{A}$ l'aire du triangle OPQ.
   a) Montrer que $\mathcal{A} = \frac{2}{\sin(2\theta)}$
   b) En déduire que l'aire $\mathcal{A}$ est minimale si et seulement si M est le milieu de [PQ].
4) Soit S le solide de révolution de l'arc ABA' où A et A' sont les sommets de $(\mathcal{E})$ sur l'axe focal et B est celui de l'axe non focal d'ordonnée positif.
   a) Définir la fonction f représentée par l'arc ABA' dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
   b) Calculer alors le volume $\mathcal{V}$ du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe $(O, \vec{\imath})$ de l'arc ABA'.

EXERCICE 2 :

1. Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x - 1 + \frac{\ln x}{2}$.
   (a) Dresser le tableau de variation de g.
   (b) Calculer $g(1)$. En déduire le signe de $g(x)$.
2. Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x - \ln x}{2\sqrt{x}}$.
   (a) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$ puis dresser le tableau de variation de f.
   (b) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ de f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$(unité graphique = 2 cm)
   (c) Calculer à l'aide d'une intégration par partie l'intégrale $J = \int_1^2 f(x)dx$. En déduire l'aire e
   cm^2 de la partie du plan limitée par $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équations $x = 1$, $x = 2$ et $y = 0$.
3. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right)$.
   (a) Montrer que pour tout entier k tel que : $0 \leqslant k \leqslant n-1$,
   $$\frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} f(x)dx \leqslant \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k+1}{n}\right).$$
   (b) Montrer que : $J + \frac{f(1)}{n} \leqslant u_n \leqslant J + \frac{f(2)}{n}$.
   (c) Déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.