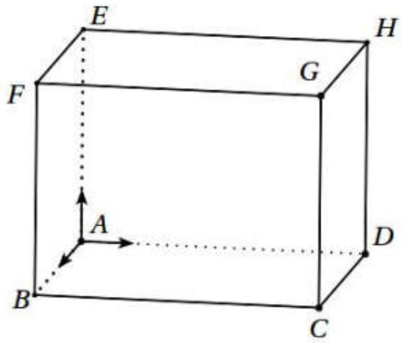
Arithmétique
Géométrie dans l'espace

Séance 3

EXERCICE 1:

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $ABCDEFGH$ est un parallélépipède tel que $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i}$, $\overrightarrow{AD} = 4\vec{j}$ et $\overrightarrow{AE} = 3\vec{k}$.



1. (a) Vérifier que $\overrightarrow{AG} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$.
   (b) Déterminer les composantes de chacun des vecteurs $\overrightarrow{EB}$; $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{EB} \wedge \overrightarrow{EG}$.
   (c) Déterminer une équation cartésienne du plan (EBG).
2. Soit α un réel différent de 1 et M le point des coordonnées $(2\alpha, 4\alpha, 3\alpha)$.
   (a) Vérifier que M décrit la droite (AG) privée du point G.
   (b) Montrer que M n'appartient pas au plan (EBG).
3. Soit $\mathscr{V}$ le volume du tétraèdre $MEBG$.
   (a) Exprimer $\mathscr{V}$ en fonction de α.
   (b) Calculer le volume du tétraèdre $AEBG$.
   (c) Pour quelles valeurs de α $\mathscr{V}$ est-il égal au volume du parallélépipède $ABCDEFGH$?

EXERCICE 2:

L'espace étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points A(6,0,0) , B(0,-6,0) et C(0,0,3). Soit S l'ensemble des points M(x, y, z) de l'espace vérifiant :
$x^2 + y^2 + z^2 - x + y - 2z + 8 = 0$

1) a) Montrer que les points A, B et C déterminent un plan P.
   b) Déterminer une équation cartésienne du plan P.
2) a) Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre I et le rayon R.
   b) Montrer que P et S se coupent suivant un cercle $\mathcal{C}$ dont on déterminera les coordonnées du centre H et le rayon r.
3) a) Vérifier que le point K(-1,1,-2) est un point de S.
   b) Déterminer une équation du plan Q tangent à S en K.
   c) Vérifier que P et Q sont parallèles.
4) Soit h une homothétie de centre I qui transforme P en Q.
   a) Montrer que h à pour rapport -3.
   b) Déterminer une équation de la sphère S' image de S par h.

EXERCICE 3:

L'espace étant muni d'un repère orthonormé direct. On donne les points A(2,-1,0) ; B(1,1,0) ; C(2,1,-1) et D(0,2,2) et S la sphère de centre A et de rayon R=$\sqrt{3}$.
Soit h l'application de l'espace dans lui-même qui à tout point M(x,y,z) associe le point

M'(x', y', z') tel que : $\begin{cases} x' = 2x - 1 \\ y' = 2y + 1 \\ z' = 2z \end{cases}$

1) Montrer que h est une homothétie dont on précisera le rapport k et le centre I.
2) a) Vérifier que les points A, B, C et D forment un tétraèdre.
   b) Calculer le volume v du tétraèdre ABCD. En déduire le volume v' du tétraèdre A'B'C'D' image de ABCD par h.
3) a) Déterminer une équation du plan (BCD).
   b) Montrer que le plan (BCD) et la sphère S sont tangents en un point H dont on déterminera les coordonnées
4) Soit S' l'image de S et P est l'image du plan (BCD) par l'homothétie h.
   a) Donner une équation du plan P image du plan (BCD) par l'homothétie h.
   b) Déterminer l'intersection du plan P et de la sphère S'.
5) Soit la droite Δ définie par le système : $\begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = -2\alpha \\ z = 1 \end{cases}$; $\alpha \in$IR
   a) Etudier la position relative de la droite D et la sphère S.
   b) Caractériser l'intersection S∩D

EXERCICE 4:

L'espace étant muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.
Soit S_m l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que :
$x^2 + y^2 + z^2 + (2m-6)x + (2m+4)y - 2z + 2m^2 - 8 = 0$; (m est un paramètre réel)
1) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles S_m est une sphère et préciser dans ce cas les coordonnées de son centre I_m et son rayon R_m.
2) Déterminer l'ensemble des points I_m lorsque m varie dans l'intervalle $\left]-\infty, \frac{21}{2}\right]$
3) On considère la droite Δ : $\begin{cases} x = 3 + 2\alpha \\ y = -2 + \alpha \\ z = 1 - \alpha \end{cases}$; $\alpha \in IR$
   Déterminer les deux sphères S_m qui sont tangentes à Δ.

EXERCICE 5:

1) Etudier suivant les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division euclidienne de5^n par 7.
2) Pour tout entier naturel n on pose S_n= 1+5+5²+….+5^n
   a) Montrer que $4S_n$=5^{n+1}-1
   b) Soit a un entier, montrer que : $4S_n$ ≡ a mod(7) si et seulement si S_n ≡ 2a mod(7).
   c) En déduire le reste de la division de S_{2015} par 7.
3) Soit n un entier naturel donné .
On considère dans ℤ×ℤ les équations : (E_0) : 5^n.x –S_n.y=0 et (E) : 5^n.x –S_n.y =7.
   a) Montrer que pour tout entier naturel n , S_n et 5^n sont premiers entre eux.
   b) Résoudre dans ℤ×ℤ l' équation (E_0).
   c) Montrer que les solutions de (E) sont : x= 35S_n + k. et y = 28 + k5^n. avec k∈ℤ.
4) Résoudre dans ℤ×ℤ, le système : $\begin{cases} 25x - 31y = 7 \\ x \wedge y = 7 \end{cases}$