REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTREDE L'EDUCATION ®®®®®®® ENS : MAB / SALAH Num : 22427502	Epreuve : Mathématiques Section : SCIENCES ET ECH SERIE n° :9 — DURE : 3H Chapitre n°1 : SERIE DE REVISION9

EXERCICE N°1 : (4 points)

Une usine produit des sacs. Chaque sac fabriqué peut présenter deux défauts : le défaut a et le défaut b. Un sac est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts.

1. Dans cette question, les probabilités demandées seront données avec leurs valeurs décimales exactes.
   On prélève un sac au hasard dans la production d'une journée.
   On note A l'événement « le sac présente le défaut a » et B l'événement « le sac présente le défaut b ». Les probabilités des événements A et B sont respectivement $p(A) = 0,02$ et $p(B) = 0,01$; on suppose que ces deux événements sont indépendants.
   a. Calculer la probabilité de l'événement C « le sac prélevé présente le défaut a et le défaut b ».
   b. Calculer la probabilité de l'événement D « le sac est défectueux ».
   c. Calculer la probabilité de l'événement E « le sac ne présente aucun défaut ».
   d. Sachant que le sac présente le défaut a, quelle est la probabilité qu'il présente aussi le défaut b ?
2. On suppose que la probabilité (arrondie au centième) qu'un sac soit défectueux est égale à $0,03$.
   On prélève au hasard un échantillon de 100 sacs dans la production d'une journée. La production est suffisamment importante pour que l'on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 sacs. On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 100 sacs, associe le nombre de sacs défectueux.
   a. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   b. Quelle est la probabilité de l'événement « au moins un sac est défectueux » ? On arrondira cette probabilité au centième. Interpréter ce résultat.
   c. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.
   Interpréter ce résultat dans le cadre de l'énoncé.

EXERCICE N°2 : (6poitns)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par : $f(x)=6-\dfrac{5}{x+1}$.

Le but de cet exercice est d'étudier des suites (u_n) définies par un premier terme positif ou nul u_0 et vérifiant pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1}=f(u_n).$$

1. Étude de propriétés de la fonction f
   a) Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0,+\infty[$.
   b) Résoudre dans l'intervalle $[0,+\infty[$ l'équation $f(x)=x$.
   On note α la solution.
   c) Montrer que si x appartient à l'intervalle $[0\ ,\ \alpha]$, alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[0\ ,\ \alpha]$.
   De même, montrer que si x appartient à l'intervalle $[\alpha\ ,+\infty[$, alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[\alpha\ ,+\infty[$.

2. Étude de la suite (u_n) pour $u_0 = 0$

Dans cette question, on considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f(u_n) = 6 - \frac{5}{u_n + 1}.$$

a) Sur le graphique représenté dans l'annexe 2, sont représentées les courbes d'équations $y = x$ et $y = f(x)$.

Placer le point A_0 de coordonnées $(u_0\,;\,0)$, et, en utilisant ces courbes, construire à partir de A_0 les points A_1, A_2, A_3 et A_4 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3 et u_4.

Quelles conjectures peut-on émettre quant au sens de variation et à la convergence de la suite (u_n) ?

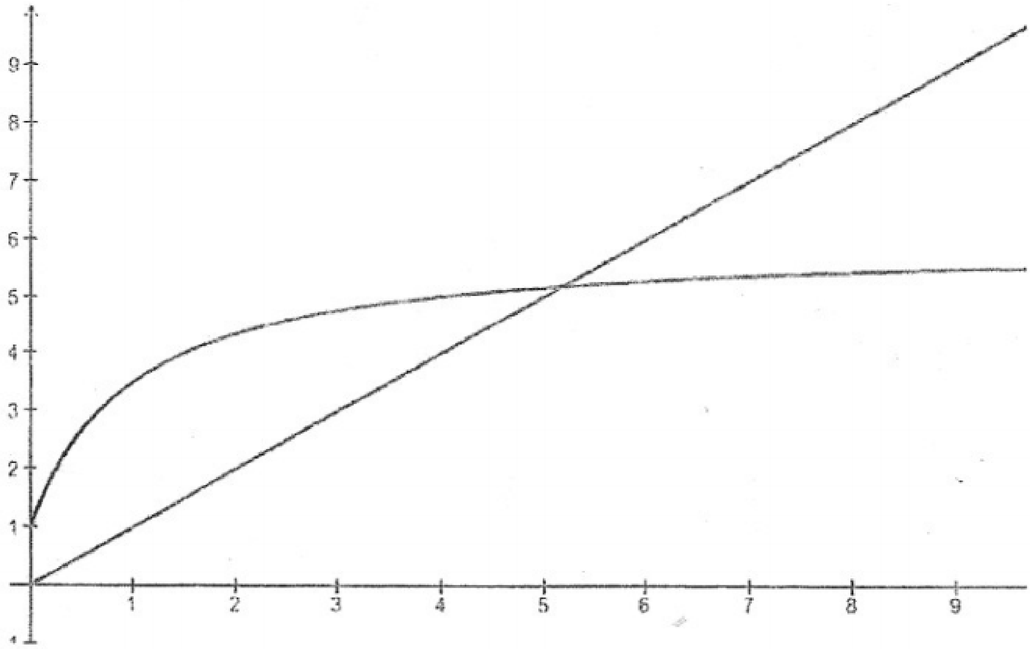
b) Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

3. Étude des suites (u_n) selon les valeurs du réel positif ou nul u_0

Dans cette question, toute trace d'argumentation, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Que peut-on dire du sens de variation et de la convergence de la suite (u_n) suivant les valeurs du réel positif ou nul u_0 ?



EXERCICE N°03 : **(4poitns)**

Un médicament est injecté par voie intraveineuse. Dans les heures qui suivent, la substance est éliminé par les reins. La quantité q_i en milligrammes, présente dans le sang à un instant t_i (en heures) a été mesurée par des prises de sang toute les deux heures. Les résultats sont donnés dans le tableau suivant :

t_i	0	2	4	6	8
q_i	9,9	7,5	5,5	3,9	3

1. /a. Construire le nuage des points $M_i(t_i\ ;\ q_i)$ correspondant à cette serie
   b. Calculer les coordonnées du point moyen G et placer ce point .
   c. Calculer le coefficient de corrélation de cette série. Interpréter ce résultat.
   d. Déterminer une équation de la droite D d'ajustement affine de q en t par la méthode des moindres carrés.(coefficients arrondis à 10^{-2}pres)
   e. En utilisant cet ajustement, quelle estimation obtient-on de la quantité de médicament présente dans le sang au bout de 12 heures ? qu'en pensez-vous de ce résultat ?

2. /On pose y = ln(q)
   a. compléter le tableau suivant et calculer le coefficient de corrélation r' de la série (t,y)

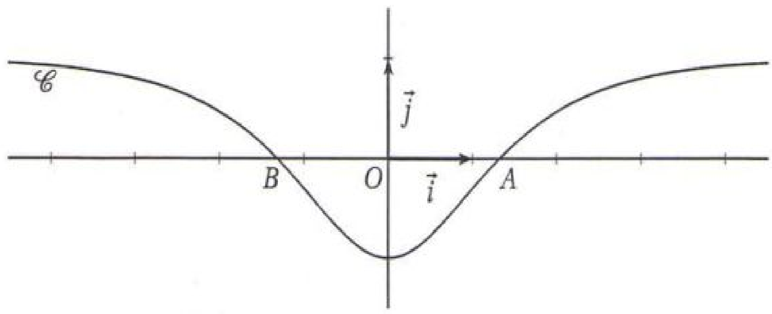
t_i	0	2	4	6	8
$y_i = \ln(q_i)$					

   b. On considère qu'une équation de la droite d'ajustement affine de y en t est : y = -0,15t + 2,30
   Montrer que l'expression de q en fonction de t obtenue de cet ajustement est donnée par :
   q = a.e^{bt} ou a et b sont deux réels que l(on déterminera.
   c. En supposant que ce modèle reste valable pendant 12 heures , quelle estimation obtient-on de la quantité de médicament présente dans le sang au bout de 12 heures ?

EXERCICE N°04 : **(6 points)**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - \dfrac{4e^x}{e^{2x}+1}$.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\right)$.

Sur le graphique ci-dessous on a tracé la courbe $\mathscr{C}$. Elle coupe l'axe des abscisses aux points A et B.



Partie A

L'objet de cette partie est de démontrer certaines propriétés de la fonction f que l'on peut conjecturer à partir du graphique.

1. La fonction f semble croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
   a. Vérifier que pour tout réel x, $\quad f'(x) = \dfrac{4e^x\left(e^{2x}-1\right)}{\left(e^{2x}+1\right)^2}$.
   b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
2. La droite d'équation $x = 0$ semble être un axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$.
   Démontrer que cette conjecture est vraie.
3. On désigne par a l'abscisse du point A et on pose $c = e^a$.
   a. Démontrer que le réel c est une solution de l'équation $x^2 - 4x + 1 = 0$.
   En déduire la valeur exacte de a.
   b. Donner le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

Partie B

L'objet de cette partie est d'étudier quelques propriétés de la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Déterminer les variations de la fonction F sur $\mathbb{R}$.
2. Interpréter géométriquement le réel $F(a)$. En déduire que $-a \leqslant F(a) \leqslant 0$.
3. On cherche la limite éventuelle de F en $+\infty$.
   a. Démontrer que pour tout réel positif t, $\quad f(t) \geqslant 1 - 4e^{-t}$.
   b. En déduire que pour tout réel positif x, $F(x) \geqslant x - 4$ et déterminer la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
4. *Dans cette question, toute trace de recherche ou d'initiative, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Déterminer la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.