REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTREDE L'EDUCATION ®®®®®®® ENS : MAB / SALAH Num : 22427502	Epreuve : Mathématiques Section : SCIENCES ET ECH SERIE n° :6 — DURE : 3H Chapitre n°1 : SERIE DE REVISION6

EXERCICE N°1 : (4 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
Pour réaliser la figure, on prendra pour unité graphique 1 cm.
Soit P le point d'affixe p où $p = 10$ et Γ le cercle de diamètre $[OP]$.
On désigne par Ω le centre de Γ.
Soit A, B, C les points d'affixes respectives a, b et c, où $a = 5+5i$, $b = 1+3i$ et $c = 8-4i$.

1. Montrer que A, B et C sont des points du cercle Γ.
2. Soit D le point d'affixe $2+2i$.
   Montrer que D est le projeté orthogonal de O sur la droite (BC).

Partie B

À tout point M du plan différent de O, d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{20}{\overline{z}} \quad \text{où } \overline{z} \text{ désigne le nombre conjugué de } z.$$

1. Montrer que les points O, M et M' sont alignés.
2. Soit Δ la droite d'équation $x = 2$ et M un point de Δ d'affixe z.
   On se propose de définir géométriquement le point M' associé au point M.
   a. Vérifier que $z + \overline{z} = 4$.
   b. Exprimer $z' + \overline{z'}$ en fonction de z et $\overline{z}$ et en déduire que $5\left(z' + \overline{z'}\right) = z'\overline{z'}$.
   c. En déduire que M' appartient à l'intersection de la droite (OM) et du cercle Γ.
   Placer M' sur la figure.

EXERCICE N°2 : (6poitns)

Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher : deux vertes et trois rouges.

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. On extrait simultanément et au hasard deux boules de l'urne.
   On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules vertes figurant dans le tirage.
   a. Vérifier que $p(X=0) = \frac{3}{10}$, puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   b. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.
   c. Calculer la probabilité de l'événement suivant :
   A : « les deux boules tirées sont de même couleur ».
2. On effectue deux tirages successifs d'une boule en respectant la règle suivante :
   si la boule tirée est rouge, on la remet dans l'urne ; si elle est verte, on ne la remet pas.
   a. En utilisant un arbre pondéré, calculer la probabilité des événements suivants :
   - B : « seule la première boule tirée est verte » ;
   - C : « une seule des deux boules tirées est verte ».

   b. Sachant que l'on a tiré exactement une boule verte, quelle est la probabilité que cette boule verte soit la première tirée ?

EXERCICE N°03 : (4poitns)

une machine est achetée à 3000 dinars. le prix de revente y ,exprimé en dinars, est donné en fonction du nombre x d'années d'utilisation par le tableau suivant :

Nombres d'années d'utilisation : x_i	0	1	2	3	4	5
Prix de revente en dinars : y_i	3000	2400	1920	1536	1229	893

A./ 1.Representrer le nuage de points associés à la série statistique (x_i ;y_j) dans un repère orthogonal du plan.

Les unités : 2cm pour une année sur l'axe des abscisses

1cm pour 200 dinars sur l'axe des ordonnées.

2./a. Donner une équation de la droite de régression D de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés.

b. Représenter la droite D dans le repère précèdent.

3./a. Déterminer le prix de revente après 6 années d'utilisation.

b. Déterminer après combien d'années d'utilisation le prix de revente devient inférieur ou égal à 300 dinars.

B./ On pose **z = ln(y)** et on admet qu'une équation de la droite de régression de z en x est donnée par :

z = - 0,22x + 8,01

1./Déterminer une expression de y en fonction de x de la forme $\mathbf{y = A^x \times B}$ ou A est un réel arrondi au centième près et B est un réel arrondi à l'unité

2./On admet que $\mathbf{y = 3011 \times (0,8)^x}$

a. Déterminer le prix de revente après **6** années d'utilisation

b. Déterminer après combien d'années d'utilisation le prix de revente devient inférieur ou égal à **500** dinars.

C./ Après 6 années d'utilisation ,le prix de revente d'une machine est **780** dinars.

Des deux ajustements précédents ,quel est celui qui semble le mieux estimer le prix de revente après **6** années d'utilisation ? Expliquer.

EXERCICE N°04 : (6 points)

Étant donné un nombre réel k, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbf{R}$ par $f_k(x) = \dfrac{1}{1+e^{-kx}}$.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Partie A

Dans cette partie on choisit $k=1$. On a donc, pour tout réel x, $f_1(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

La représentation graphique $\mathscr{C}_1$ de la fonction f_1 dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ est donnée en **ANNEXE**, ***à rendre avec la copie***.

1. Déterminer les limites de $f_1(x)$ en $+\infty$ et en $-\infty$ et interpréter graphiquement les résultats obtenus.
2. Démontrer que, pour tout réel x, $f_1(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$.
3. On appelle f_1' la fonction dérivée de f_1 sur $\mathbf{R}$. Calculer, pour tout réel x, $f_1'(x)$. En déduire les variations de la fonction f_1 sur $\mathbf{R}$.
4. On définit le nombre $I = \int_0^1 f_1(x)\mathrm{d}x$. Montrer que $I = \ln\left(\dfrac{1+e}{2}\right)$. Donner une interprétation graphique de I.

Partie B

Dans cette partie, on choisit $k = -1$ et on souhaite tracer la courbe $\mathscr{C}_{-1}$, représentant la fonction f_{-1}.
Pour tout réel x, on appelle P le point de $\mathscr{C}_1$ d'abscisse x et M le point de $\mathscr{C}_{-1}$ d'abscisse x.
On note K le milieu du segment $[MP]$.

1. Montrer que, pour tout réel x, $f_1(x) + f_{-1}(x) = 1$.
2. En déduire que le point K appartient à la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$.
3. Tracer la courbe $\mathscr{C}_{-1}$ sur l'**ANNEXE, *à rendre avec la copie***.
4. En déduire l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_{-1}$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

Partie C

Dans cette partie, on ne privilégie pas de valeur particulière du paramètre k.
Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Quelle que soit la valeur du nombre réel k, la représentation graphique de la fonction f_k est strictement comprise entre les droites d'équations $y = 0$ et $y = 1$.
2. Quelle que soit la valeur du réel k, la fonction f_k est strictement croissante.
3. Pour tout réel $k \geq 10$, $f_k\left(\dfrac{1}{2}\right) \geq 0{,}99$.

Représentation graphique $\mathscr{C}_1$ de la fonction f_1