EXERCICE 1 ☺

1

1) a) Déterminer le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11.

b) Déterminer le reste de la division euclidienne de 6^4 par 5.

c) En déduire que $6^{40} \equiv 1(mod 11)$ et que $6^{40} \equiv 1(mod 5)$

d) Démontrer que $6^{40} - 1$ est divisible par 55

2) Dans cette question x et y désignent deux entiers relatifs.

a) Vérifier que l'équation (E) : $65x - 40y = 1$ n'a pas de solution.

b) Vérifier que l'équation (E') : $17x - 40y = 1$ admet au moins une solution.

c) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E'). En déduire le reste modulo 40 de 17.

CORRECTION ☺

1) a) $6^5 = 7776 = 11 \times 706 + 10 \Longrightarrow 6^5 \equiv 10(mod\ 11)$

$\Longrightarrow 6^5 \equiv -1(mod\ 11)$ ou encore $6^{10} \equiv 1(mod\ 11)$

b) $6^2 = 36 \equiv 1(mod\ 5) \Longrightarrow 6^4 \equiv 1(mod\ 5)$

c) $6^{10} \equiv 1(mod\ 11) \Longrightarrow 6^{40} \equiv 1(mod\ 11)$

$6^4 \equiv 1(mod\ 5) \Longrightarrow 6^{40} \equiv 1(mod\ 5)$

d) $\begin{cases} 6^{40} \equiv 1(mod\ 11) \\ 6^{40} \equiv 1(mod\ 5) \\ 5 \wedge 11 = 1 \end{cases} \Longrightarrow 6^{40} \equiv 1(mod\ 5 \times 11)$

$\Longrightarrow 6^{40} - 1 \equiv 0(mod\ 55)$

2) a) $65 \wedge 40 = 5 \neq 1$ donc (E) n'admet pas de solutions.

b) $17 \wedge 40 = 1$ donc (E') admet au moins une solution.

c) Remarquons que $(-7, -3)$ est une solution particulière de (E'). (Algorithme d'euclide)

$\begin{cases} 17x - 40y = 1 \\ 17 \times (-7) - 40 \times (-3) = 1 \end{cases} \Longrightarrow 17(x + 7) = 40(y + 3)$

$\Longrightarrow$ 17 divise $(y + 3)$ et 40 divise $(x + 7)$ car $17 \wedge 40 = 1$

$\Longrightarrow y = 17k - 3$ et $x = 40k - 7$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Inversement ; Si $x = 40k - 7$ et $y = 17k - 3$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

$17(40k - 7) - 40(17k - 3) = -119 + 120 = 1$.

Ainsi $S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} = \{(40k - 7, 17k - 3); k \in \mathbb{Z}\}$

Pour $k = 1$, $(33, 14)$ est une solution de (E') c'est-à-dire

$17 \times 33 - 40 \times 14 = 1 \Longrightarrow 17 \times 33 = 40 \times 14 + 1$ ou encore
$17 \times 33 \equiv 1(mod\ 40)$ et par suite 33 est l'inverse modulo 40 de 17.

EXERCICE 2 ☺

On pose $a = 7^{2009} + 7^{2010} + 7^{2011}$.

1) Soit n un entier naturel. Discuter suivant les valeurs de n, le reste de 7^n modulo 100.

2) En déduire qu'il existe un entier naturel k tel que $a = 100k - 1$.

3) a) En utilisant la formule du binôme, montrer que $a^{100} \equiv 1 \pmod{100^2}$.

   b) Déterminer les quatre derniers chiffres de a^{100}.

CORRECTION ☺ à faire ☹

EXERCICE 3☺

Soient $a = 2n + 1$ et $b = 5n + 1$ deux entiers.

1. Déterminer deux entiers u et v tels que $au + bv = 3$
2. En déduire les valeurs possibles de $d = PGCD(a, b)$?
3. Montrer que si $n \equiv 1\ [3]$ alors $d = 3$, que vaut d sinon ?

CORRECTION ☺

1. $5a - 2b = 5(2n + 1) - 2(5n + 1) = 3$
2. d divise 3, donc $d = 1$ ou $d = 3$.
3. Si $n \equiv 1\ [3]$, $a = 2n + 1 \equiv 3\ [3] \equiv 0\ [3]$ donc 3 divise a et $b = 5n + 1 \equiv 6\ [3] \equiv 0\ [3]$ donc 3 divise b. 3 est un diviseur commun à a et à b, donc $d \geq 3$, dans ce cas $d = 3$.
   Si $n \equiv 0\ [3]$ alors $a = 2n + 1 \equiv 1\ [3] \not\equiv 0\ [3]$ donc 3 ne divise pas a, 3 n'est pas un diviseur commun à a et à b, donc $d = 1$.
   Si $n \equiv 2\ [3]$ alors $a = 2n + 1 \equiv 5\ [3] \equiv 2\ [3] \not\equiv 0\ [3]$ donc 3 ne divise pas a, 3 n'est pas un diviseur commun à a et à b, donc $d = 1$.

Exercice 4 ☺

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, les entiers $14n+3$ et $5n+1$ sont premiers entre eux
2. On considère l'équation (E) : $87x+31y=2$ où x et y sont des entiers relatifs
   2.1. Montrer que 87 et 31 sont premiers entre eux.
   2.2. En déduire un couple $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $87u+31v=1$, puis une solution (x_0, y_0) de (E)
   2.3. Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

CORRECTION ☺

1.

$$5(14n+3)-14(5n+1)=1$$

Est une identité de Bézout, 1 divise le PGCD de $14n+3$ et de $5n+1$ donc leur PGCD vaut 1, ils sont premiers entre eux.

2.

2.1. $87=14\times 6+3$ et $31=5\times 6+1$ d'après la première question, ils sont premiers entre eux.

2.2. D'après la première question

$$5(14\times 6+3)-14(5\times 6+1)=1 \Leftrightarrow 5\times 87+(-14)\times 31=1 \quad (1)$$

Donc $(u,v)=(5,-14)$ convient.

Il suffit de multiplier (1) par 2.

$$10\times 87+(-28)\times 31=2$$

2.3.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix}\begin{cases} 87x+31y=2 \\ 10\times 87+(-28)\times 31=2 \end{cases}$$

$$L_1-L_2\colon\ 87(x-10)+31(y+28)=0$$

$$87(x-10)=31(-y-28) \quad (2)$$

87 et 31 sont premier entre eux et 87 divise $31(-y-28)$ donc 87 divise $-y-28$, il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que :

$$-y-28=87k \quad (3) \Leftrightarrow y=-87k-28$$

On remplace (3) dans (2)

$$87(x-10)=31\times 87k \Leftrightarrow x-10=31k \Leftrightarrow x=10+31k$$

La réciproque est évidente et l'ensemble des solutions est :

$$\{(10+31k,-28-87k),k\in\mathbb{Z}\}$$

EXERCICE 5 ☺

1) Soit a un entier tel que $a\equiv 1\,(\bmod 10)$.

a) Montrer que $a^9+a^8+\ldots+a+1\equiv 0\,(\bmod 10)$.

b) En déduire que $a^{10}\equiv 1\,(\bmod 10^2)$.

(On pourra utiliser l'égalité $a^{10}-1=(a-1)(a^9+a^8+..+a+1)$).

2) Soit b un entier.

a) Déterminer les restes possibles de b^4 dans la division euclidienne par 10.

b) En déduire que $b^4 \equiv 1(\bmod 10)$ si et seulement si b est premier avec 10.

3) Soit b un entier premier avec 10.

a) Montrer que $b^{40} \equiv 1(\bmod 10^2)$.

b) Déterminer les deux derniers chiffres de 67^{42} .

INTEGRATION ☺

EXERCICE 6

Soit f la fonction définie et dérivale sur l'intervalle $[0;+\infty[$ telle que : $f(x)=\dfrac{x}{e^x-x}$

Soit la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$I_n=\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$$

On ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de I_n en fonction de n.

1. Montrer que la suite (I_n) est croissante.

2. On admet que pour tout réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$:

$$e^x-x\geqslant\frac{e^x}{2}$$

a. Montrer que, pour tout entier naturel n :

$$I_n\leqslant\int_0^n 2\cdot x\cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

b. Soit H la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$ telle que : $H(x)=(-x-1)\cdot e^{-x}$.
Déterminer la fonction dérivée H' de la fonction H.

c. En déduire que, pour tout entier naturel n : $I_n \leqslant 2$.

3. Montrer que la suite (I_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

Correction ☺

1. Etudions la différence suivante :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{n} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_n^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$$

D'après la relation de Chasles :

$$= \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Or, on a : $\begin{cases} n \leqslant n+1 \\ \text{Pour tout } x \in [n\,;n+1[, \text{ on a : } \quad f(x) \geqslant 0 \end{cases}$

Par positivité de l'intégrale, on en déduit :

$$\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$$

$$I_{n+1} - I_n \geqslant 0$$

$$I_{n+1} \geqslant I_n$$

Ainsi, la suite (I_n) est une suite croissante.

2. a. Utilisons la comparaison donnée dans l'énoncé pour tout $x \in [0\,;+\infty[$:

$$e^x - x \geqslant \frac{e^x}{2}$$

$$e^x - x \geqslant \frac{e^x}{2} > 0$$

La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+$:

$$\frac{1}{e^x - x} \leqslant \frac{2}{e^x}$$

Le nombre x étant positif :

$$\frac{x}{e^x - x} \leqslant 2x \cdot e^{-x}$$

Grâce à la positivité de l'intégrale :

$$\int_0^n \frac{x}{e^x - x}\, \mathrm{d}x \leqslant \int_0^n 2x \cdot e^{-x}\, \mathrm{d}x$$

$$I_n \leqslant \int_0^n 2x \cdot e^{-x}\, \mathrm{d}x$$

b. L'expression de la fonction H est donnée sous la forme d'un produit des fonctions u et v définies par :

$u(x) = -x - 1 \quad ; \quad v(x) = e^{-x}$

qui admettent pour dérivées :

$u'(x) = -1 \quad ; \quad v'(x) = -e^{-x}$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction H' dérivée de la fonction H :

$$\begin{aligned} H'(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\ &= (-1) \cdot e^{-x} + (-1 - x) \cdot (-e^{-x}) = -e^{-x} + (1 + x) \cdot e^{-x} \\ &= \left[-1 + (1 + x)\right] \cdot e^{-x} = x \cdot e^{-x} \end{aligned}$$

c. La primitive de la fonction $x \longmapsto 2x \cdot e^{-x}$ est la fonction $2 \cdot H$. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^n 2 \cdot x \cdot e^{-x}\, \mathrm{d}x = \left[2 \cdot H(x)\right]_0^n \\ &= 2 \cdot \left[(-n-1) \cdot e^{-n}\right] - 2 \cdot \left[(-0-1) \cdot e^{-0}\right] = 2 \cdot \left[(-n-1) \cdot e^{-n}\right] + 2 \end{aligned}$$

Or, pour tout entier naturel, on a :