EXERCICE 1

KHAZRISCHOOL

1°/ Soit la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = -1 + x\operatorname{Log}^2 x$

a/ Etudier les variations de g

Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $2 < \alpha < 2{,}1$

b/ En déduire le signe de $g(x)$

2°/ Soit la fonction f définie sur le domaine $\mathcal{D} = [0;1[\cup]1, +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = x + \dfrac{1}{\operatorname{Log} x} & \text{si } x \in \mathcal{D} \setminus \{0\} \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On note par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan

a/ Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en 0

b/ Montrer que $f(\alpha) = \alpha + \sqrt{\alpha}$

c/ Etudier les variations de f

3°/ On note par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan

a/ Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ possède une asymptote oblique Δ dont on précisera l'équation réduite

b/ Etudier la position relative de $\mathscr{C}$ et Δ puis tracer les

EXERCICE 2

1°/ Etudier les variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \operatorname{Log}\left(x + \sqrt{x^2 + 3}\right)$

2°/ Montrer que la courbe C_g admet un point d'inflexion I dont on précisera les coordonnées

3°/ Montrer que I est un centre de symétrie de C_g

4°/ Montrer que g est bijective et calculer $g^{-1}(x)$ en fonction de x

5°/ Etudier les branches infinies de C_g puis tracer C_g et $C_{g^{-1}}$ dans un même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

EXERCICE 3 BAC MATH "PROBLEME"

A/ Soit g la fonction numérique à variable réelle définie par :

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{e^x - 1}{2e^x - 1} & \text{si } x \leq 0 \\ g(x) = \operatorname{Log}(1 + x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de g sur son domaine de définition.
2) Dresser le tableau de variation de g.
3) a) Déterminer l'intersection de $\mathscr{C}_g$ avec la droite d'équation $y=-1$.

b) Construire la courbe $\mathscr{C}_g$ dans un repère orthonormé.

B/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{-\mathrm{Log}2\}$ par $f(x)=x-\dfrac{1}{2}\mathrm{Log}\left|2e^{x}-1\right|$.

1) a) Etudier les variations de f.

b) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ deux solutions 0 et un autre réel x_0 vérifiant : $-1<x_0<-\mathrm{Log}2$ .Calculer la valeur exacte de x_0.

2) a) Construire la courbe $\mathscr{C}_f$ de f.

b) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $\dfrac{e^{2x}}{\left|2e^{x}-1\right|}=e^{2m}$ suivant les valeurs du paramètre réel m.

3) Soit h la restriction de f à $I=\left]-\infty,-\mathrm{Log}2\right[$.

Montrer que h réalise une bijection de I sur un intervalle J qu'on précisera

Expliciter $h^{-1}(x)$.

C/ Soit U la suite réelle définie par $U_0\in\mathbb{R}_+$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$U_{n+1}=f(U_n)+\frac{1}{2}.$$

1) a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}_+$ on a : $0\le f'(x)<\dfrac{1}{2}$.

b) On pose $\varphi(x)=f(x)+\dfrac{1}{2}-x$ pour $x\in\mathbb{R}_+$.

Montrer que l'équation $\varphi(x)=0$ admet une solution unique α et qu $\alpha\in\left]0,\mathrm{Log}2\right[$.

2) Dans la suite on suppose que $U_0\neq\alpha$.

a) Montrer que U_n appartient à l'un des intervalles $\left[0,\alpha\right[$ ou $\left]\alpha,+\infty\right[$ dans le quel est situé U_0.

b) Etudier le sens de variation de U suivant la position de U_0 et prouver que U est convergente.

3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot |U_0 - \alpha|$.

Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

Correction

Exercice 1 ☺

1°/ La fonction g est définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par : $g(x) = -1 + x\text{Log}^2(x)$

a/ $\lim\limits_{x \to +\infty} \text{Log}(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-1 + x\text{Log}^2(x)\right) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

On pose : $y = \sqrt{x}$ On aura : $x = y^2$

Lorsque x tend vers 0^+, y tend vers 0^+ D'où : $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(-1 + 4(y\text{Log}y)^2\right) = -1$

La fonction g est dérivable sur $]0, +\infty[$: $\forall x > 0$, $g'(x) = \text{Log}^2(x) + x\left(\frac{2\text{Log}x}{x}\right) = \text{Log}^2(x) + 2\text{Log}(x)$

$g'(x) = \text{Log}^2(x) + 2\text{Log}(x) = \text{Log}(x)\left(\text{Log}(x) + 2\right)$

$\text{Log}(x) + 2 = 0 \Leftrightarrow \text{Log}(x) = -2\text{Log}\,e \Leftrightarrow \text{Log}(x) = \text{Log}\,e^{-2} \Leftrightarrow x = e^{-2}$

$\text{Log}(x) + 2 > 0 \Leftrightarrow \text{Log}(x) > -2\text{Log}\,e \Leftrightarrow \text{Log}(x) > \text{Log}\,e^{-2} \Leftrightarrow x > e^{-2}$

x	0		e^{-2}		1		$+\infty$
$\text{Log}(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$\text{Log}(x)+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	-1	$\nearrow$	$-0,45$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

- Le nombre $-0,45$ est le maximum de g sur l'intervalle $]0;1]$. Donc l'équation : $g(x) = 0$ n'admet aucune solution dans $]0;1]$
- La fonction g est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]1, +\infty[$. Elle réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur son image $]-1, +\infty[$.

0 appartient à l'intervalle $]-1, +\infty[$, donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à l'intervalle $]1, +\infty[$

- $\begin{cases} g(2) \simeq -0,03 \\ g(2,1) \simeq 0,15 \end{cases} \Rightarrow g(2) \times g(2,1) < 0$ D'après le théorème des valeurs intermédiaires : $2 < \alpha < 2,1$

b/ $\forall x \in]0;1]$, $g(x) \le g(e^{-2}) \Rightarrow g(x) < 0$

$x \in]1, \alpha[\Rightarrow g(x) < g(\alpha) \Rightarrow g(x) < 0$

$x \in]\alpha, +\infty[\Rightarrow g(x) > g(\alpha) \Rightarrow g(x) > 0$

D'où le signe de g(x) :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	||	$-$	0	$+$	

2°/ La fonction f est définie sur le domaine $\mathcal{D} = [0;1[\cup]1, +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = x + \dfrac{1}{\text{Log}(x)} & \text{si } x \in \mathcal{D} \\ f(0) = 0 \end{cases}$

a/ $\lim\limits_{x\to 0^+} \text{Log}(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\text{Log}(x)} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x + \dfrac{1}{\text{Log}(x)}\right) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

Donc f est continue à droite en 0

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(1 + \dfrac{1}{x\text{Log}(x)}\right) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0^+} x\text{Log}(x) = 0^-$

Donc f n'est pas dérivable à droite en 0

b/ $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow -1 + \alpha\text{Log}^2(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \text{Log}^2(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha}$

$2 < \alpha < 2{,}1 \Rightarrow \alpha > 1 \Rightarrow \text{Log}(\alpha) > 0$

$\left.\begin{array}{l} \text{Log}^2(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha} \\ \text{Log}(\alpha) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Log}(\alpha) = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}} \Rightarrow \dfrac{1}{\text{Log}(\alpha)} = \sqrt{\alpha} \Rightarrow f(\alpha) = \alpha + \sqrt{\alpha}$

c/ $\lim\limits_{x\to +\infty} \text{Log}(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{\text{Log}(x)} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to +\infty}\left(x + \dfrac{1}{\text{Log}(x)}\right) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^+} \text{Log}(x) = 0^+ \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{\text{Log}(x)} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+}\left(x + \dfrac{1}{\text{Log}(x)}\right) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$

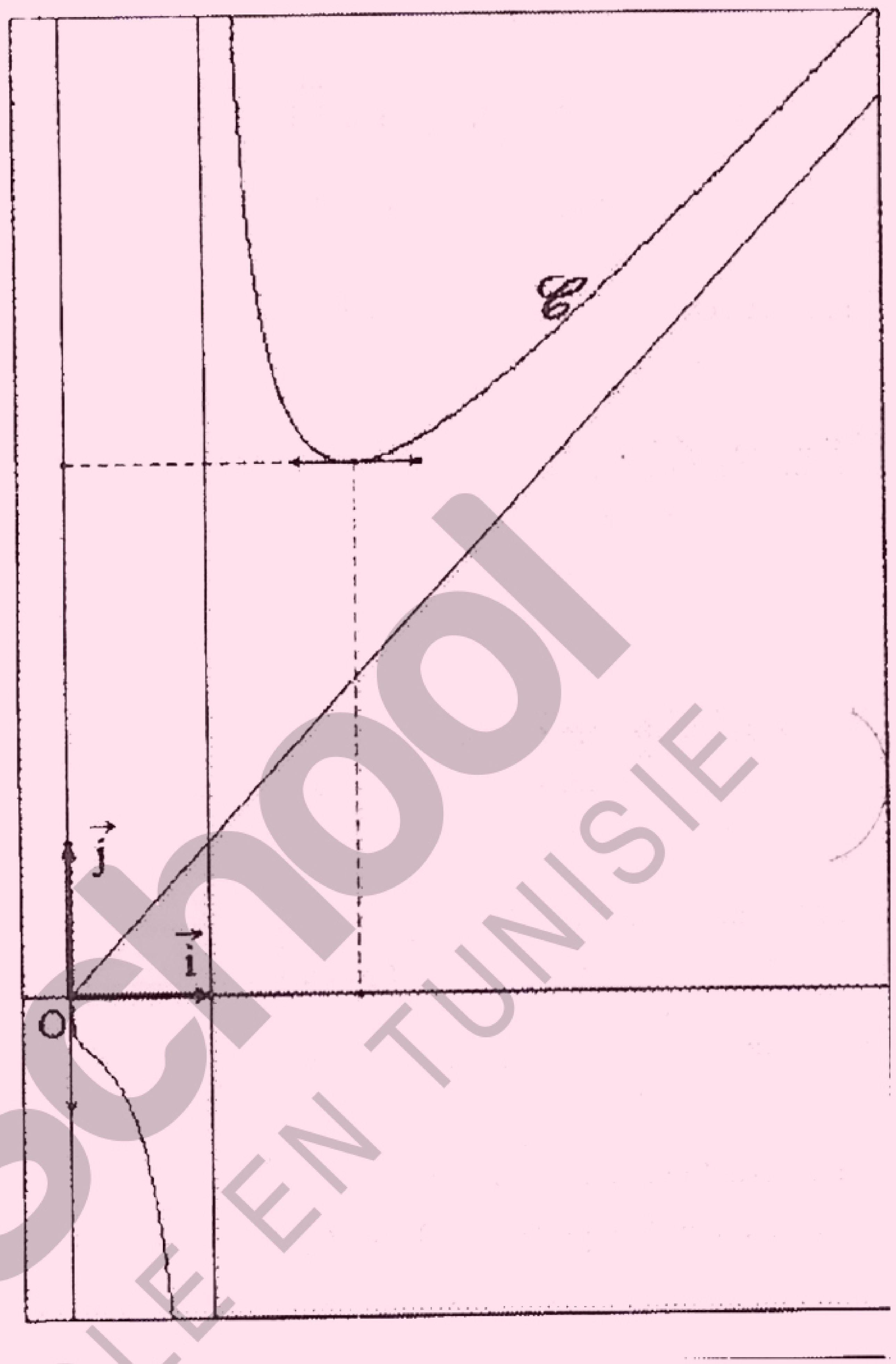
$\lim\limits_{x\to 1^-} \text{Log}(x) = 0^- \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{\text{Log}(x)} = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-}\left(x + \dfrac{1}{\text{Log}(x)}\right) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$

La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}^* =]0;1[\cup]1, +\infty[$

$\forall x \in \mathcal{D}^*$, $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x\text{Log}^2(x)} = \dfrac{-1 + x\text{Log}^2(x)}{x\text{Log}^2(x)} = \dfrac{g(x)}{x\text{Log}^2(x)}$ Donc $f'(x)$ est de même signe que : $g(x)$

x	0		1		α		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	$\alpha + \sqrt{\alpha}$	↗	$+\infty$

3°/ a/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\text{Log}(x)}=0$ Donc la droite Δ d'équation $y=x$ est asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$



b/

x	0		1		$+\infty$
Log(x)	‖	$-$	0	$+$	
f(x) − x	0	$-$	‖	$+$	

- Sur l'intervalle $]0\,;1[$, la courbe $\mathscr{C}$ est au dessous de Δ
- Sur l'intervalle $]1,+\infty[$, la courbe $\mathscr{C}$ est au dessus de Δ
- L'origine O est le point d'intersection de $\mathscr{C}$ et Δ

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\infty$ Donc la droite d'équation $x=1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$

$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=-\infty$ donc la courbe $\mathscr{C}$ admet en O une demi tangente verticale dirigée vers les ordonnées négatives

Exercice 2 ☺

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\text{Log}\left(x+\sqrt{x^2+3}\right)$

1°/ La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$: $f'(x)=\dfrac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}}{x+\sqrt{x^2+3}}=\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}}{x+\sqrt{x^2+3}}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{x^2+3}+x}{\sqrt{x^2+3}}}{x+\sqrt{x^2+3}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+3}}>0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2+3}\right)=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\text{Log}\left(x+\sqrt{x^2+3}\right)=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+3}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+3}+x\right)\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)}{\sqrt{x^2+3}-x}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{\sqrt{x^2+3}-x}=0^+$

x	$-\infty$	$+\infty$
f'(x)	$+$	
f(x)	$-\infty$ ↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+3}\right)=0^+\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\text{Log}\left(x+\sqrt{x^2+3}\right)=-\infty$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

2°/ La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$: $\forall x\in\mathbb{R}$, $f''(x)=\dfrac{-\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}}{x^2+3}=-\dfrac{x}{\left(x^2+3\right)\sqrt{x^2+3}}$

..

2°/ La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = \dfrac{-\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}}{x^2+3} = -\dfrac{x}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}$

f'' s'annule et change le signe en 0, donc le point I d'abscisse 0 est le point d'inflexion de la courbe C_g

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

$f(0) = \operatorname{Log}\sqrt{3}$ Donc $I\left(0, \operatorname{Log}\sqrt{3}\right)$

3°/ $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \operatorname{Log}\left(-x+\sqrt{x^2+3}\right) = \operatorname{Log}\left(\dfrac{3}{\sqrt{x^2+3}+x}\right) = \operatorname{Log}3 - \operatorname{Log}\left(x+\sqrt{x^2+3}\right) = 2\left(\operatorname{Log}\sqrt{3}\right) - f(x)$

Donc le point $I\left(0, \operatorname{Log}\sqrt{3}\right)$ est un centre de symétrie de la courbe C_g

4°/ La fonction g est continue et strictement croissante. Elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur son image $\mathbb{R}$

Sa réciproque g^{-1} est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$: $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ g^{-1}(x) = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in \mathbb{R} \\ g(y) = x \end{cases}$

$$g(y) = x \Leftrightarrow \operatorname{Log}\left(y+\sqrt{y^2+3}\right) = x \Leftrightarrow y+\sqrt{y^2+3} = e^x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y^2+3} = e^x - y$$

$$\Leftrightarrow y^2+3 = e^{2x}+y^2-2ye^x \Leftrightarrow 2ye^x = e^{2x}-3 \Leftrightarrow y = \frac{e^{2x}-3}{2e^x}$$

D'où : $\boxed{g^{-1}(x) = \dfrac{e^{2x}-3}{2e^x}}$

5°/ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\operatorname{Log}x\left(1+\sqrt{1+\dfrac{3}{x^2}}\right)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\operatorname{Log}x}{x} + \dfrac{1}{x}\operatorname{Log}x\left(1+\sqrt{1+\dfrac{3}{x^2}}\right)\right) = 0$ Donc la courbe C_g admet au voisinage de $+\infty$ une branche infinie parabolique de direction celle de l'axe des abscisses

Le point I est un centre de symétrie de la courbe C_g, donc C_g admet au voisinage de $-\infty$ une branche parabolique de même direction