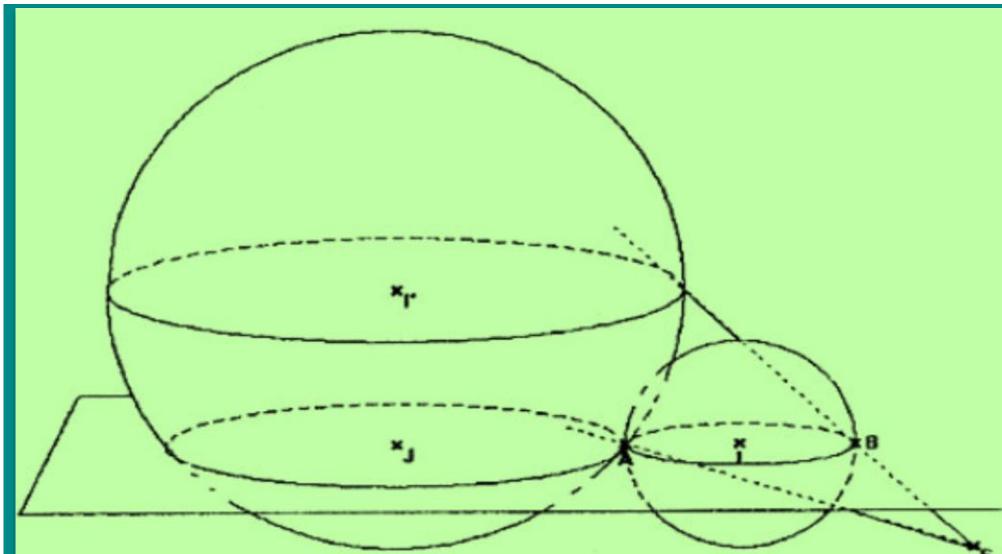
Espace

Exercice 1 ☺ SC2015

Soit $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ un repère orthonormé de l'espace .
On considère les points $A(-2,3,2)$ et $B(2,3,2)$ et l'ensemble S des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que $x^2+y^2+z^2-6y-4z+9=0$.

1) a) Montrer que S est une sphère et préciser son rayon et les coordonnées de son centre I.

b) Montrer que $[AB]$ est un diamètre de S .



2) Soit P le plan d'équation $z = 2$ et soit $J(-6,3,2)$.

a) Vérifier que I appartient au plan P et en déduire que la sphère S coupe P suivant le cercle Γ de diamètre $[AB]$.

b) Dans le plan P, on considère le cercle Γ' de centre J et de rayon 4.

Montrer que les cercles Γ et Γ' sont tangents extérieurement en A.

3) Soit E le point de coordonnées $(4,3,0)$. On considère l'homothétie h de centre E, de rapport $\frac{5}{2}$ et on désigne par S' la sphère image de S par h.

a) Déterminer le rayon de S' et les coordonnées de son centre I'.

b) Justifier que le plan P coupe la sphère S' suivant le cercle Γ'.

c) La droite (EA) recoupe S' en A'. Soit B' le point diamétralement opposé à A' sur la sphère S'. Montrer que les points E, B et B' sont alignés.

Correction ☺

1) a) $M(x,y,z) \in S \Leftrightarrow x^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 4$, on en déduit que S est la sphère de centre $I(0,3,2)$ et de rayon 2.

b) Il suffit de vérifier que $A \in S$, $B \in S$ et I est le milieu de [AB]..

2) a) La cote du point I est 2 donc $I \in P$ par suite S coupe P suivant le cercle Γ de centre I et de rayon 2, or A et B appartiennent à P et I est le milieu de [AB]. donc [AB] est un diamètre de Γ.

b) $IA = 2$, $JA = 4$ et $IJ = 6$ donc $IA + JA = IJ$ par suite Γ et Γ' sont tangents extérieurement en A.

3) a) Le rayon de S' est égal à $\frac{5}{2} \times 2 = 5$. On pose $I'(x,y,z)$,

$$h(I) = I' \Leftrightarrow \overrightarrow{EI'} = \frac{5}{2}\overrightarrow{EI} \Leftrightarrow \begin{cases} x-4=-10 \\ y-3=0 \\ z=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-6 \\ y=3 \\ z=5 \end{cases}$$, il en résulte que $I'(-6,3,5)$.

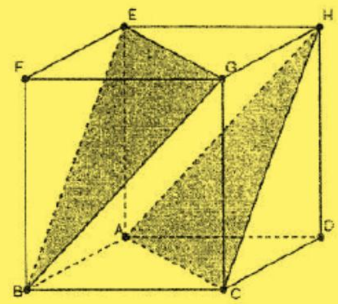
b) $d(I',P) = 3 < 5$ donc S' coupe P suivant un cercle de rayon $\sqrt{25-9} = 4$ et de centre le projeté orthogonal de I' sur P, or J est un point de P et $\overrightarrow{I'J}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ est normal à P donc J est le projeté orthogonal de I' sur P, il en résulte que P coupe S' suivant le cercle Γ'.

c) $A \in S \cap (EA)$ donc $h(A) \in S' \cap (EA) = \{A, A'\}$ or $h(A) \neq A$ donc $h(A) = A'$.

B est le point diamétralement opposé à A sur S donc $h(B)$ est le point diamétralement opposé à A' sur S',

on en déduit que $h(B) = B'$ par suite E, B et B' sont alignés.

Exercice 2 ☺ SP2014



L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit ABCDEFGH le cube tel que

$\overrightarrow{AB} = 6\vec{i}$, $\overrightarrow{AD} = 6\vec{j}$ et $\overrightarrow{AE} = 6\vec{k}$.

On désigne par P le plan (ACH) et par Q le plan (EGB).

1) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AH}$.

b) En déduire une équation du plan P.

c) Montrer que les plans P et Q sont parallèles et donner une équation du plan Q.

2) Soit S la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z = 0$

a) Déterminer le rayon de S et les coordonnées de son centre I.

b) Soit J le projeté orthogonal de A sur le plan Q. Montrer que [AJ] est un diamètre de S.

c) Montrer que la sphère S est tangente à chacun des deux plans P et Q.

3) Soit t la translation de vecteur $\vec{U} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$.

a) Soit A' et J' les images respectives de A et J par t. Déterminer les coordonnées de A' et J'.

b) Déterminer S' l'image de la sphère S par t.

c) Montrer que S' est tangente aux deux plans P et Q et déterminer leurs points de contact.

Correction ☺

1) Le point O est le milieu de [BI] donc $\overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{IO}$, il en résulte que $h(O) = B$.

$$\begin{cases} \dfrac{OA}{OI} = 2 \\ \left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$$, il en résulte que $S(I) = A$.

2) a) On sait que $h(O) = B$ et $S(O) = O$ par suite le point O' est le barycentre des points pondérés $(B,3)$ et $(O,1)$, on en déduit que $\overrightarrow{OO'} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OB}$.

b) On sait que $h(I) = I$ et $S(I) = A$ par suite le point I' est le barycentre des points pondérés $(I,3)$ et $(A,1)$, on en déduit que $\overrightarrow{II'} = \frac{1}{4}\overrightarrow{IA}$.

3) a) $h(M) = P \Leftrightarrow \overrightarrow{IP} = 2\overrightarrow{IM} \Leftrightarrow z_P - 1 = 2(z-1) \Leftrightarrow z_P = 2z - 1$.

b) S est la similitude directe de centre O, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui envoie M en Q donc

$z_Q = 2e^{i\frac{\pi}{2}}z = 2iz$.

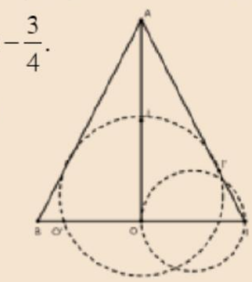
c) $f(M) = M'$ donc le point M' est le barycentre des points pondérés $(P,3)$ et $(Q,1)$ on en déduit que

$\overrightarrow{PM'} = \frac{1}{4}\overrightarrow{PQ} \Leftrightarrow z' - z_P = \frac{1}{4}(z_Q - z_P) \Leftrightarrow z' = \frac{1}{4}(2iz - 2z + 1) + 2z - 1 = \frac{3+i}{2}z - \frac{3}{4}$.

d) L'expression complexe de f est de la forme $z' = az + b$ avec $a = \frac{3+i}{4} \neq 0$

donc f est une similitude directe, comme $f(O) = O'$ et $f(I) = I'$,

on en déduit que l'image du cercle de diamètre [OI] par f est le cercle de diamètre [O'I'].



Conique ☺

Exercice 1 ☺

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\mathscr{R} = \left(0, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Eléménts caractéristiques de la courbe dont une équation dans $\mathscr{R}$ est

— 1. $y = x^2 + x + 1$,

2. $y^2+y-2x=0$,

3. $y=\sqrt{2x+3}$.

— 1. $x^2+x+2y^2+y=0$,

2. $y=-2\sqrt{-x^2+x}$.

Correction ☺

1. (a) $y=x^2+x+1 \Leftrightarrow y=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} \Leftrightarrow \left(y-\frac{3}{4}\right)=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$. $\mathscr{C}$ est la parabole de sommet $S\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$, d'axe focal la droite d'équation $x=-\frac{1}{2}$, de paramètre $p=\frac{1}{2}$ et donc de foyer $F\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)=\left(-\frac{1}{2},1\right)$ et de directrice d'équation $y=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

(b) $y^2+y-2x=0 \Leftrightarrow \left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-2x=0 \Leftrightarrow \left(y+\frac{1}{2}\right)^2=2\left(x+\frac{1}{8}\right)$. $\mathscr{C}$ est la parabole de sommet $S\left(-\frac{1}{8},-\frac{1}{2}\right)$, d'axe focal la droite d'équation $y=-\frac{1}{2}$, de paramètre $p=1$ et donc de foyer $F\left(-\frac{1}{8}+\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{3}{8},-\frac{1}{2}\right)$ et de directrice d'équation $x=-\frac{1}{8}-\frac{1}{2}=-\frac{5}{8}$.

(c) $y=\sqrt{2x+3} \Leftrightarrow y^2=2\left(x+\frac{3}{2}\right)$ et $y \geqslant 0$. $\mathscr{C}$ est une demi-parabole de sommet $S\left(-\frac{3}{2},0\right)$, d'axe focal (Ox), de paramètre $p=1$ et donc de foyer $F\left(-\frac{3}{2}+\frac{1}{2},0\right)=(-1,0)$ et de directrice d'équation $x=-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=-2$.

2. (a) $x^2+x+2y^2+y=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+2\left(y+\frac{1}{4}\right)^2=\frac{3}{8} \Leftrightarrow \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{3}{8}}\right)^2}+\frac{\left(y+\frac{1}{4}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}=1$. $\mathscr{C}$ est une ellipse. Centre : $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$.
$a=\sqrt{\frac{3}{8}}>\frac{\sqrt{3}}{4}=b$. Axe focal : $y=-\frac{1}{4}$. Sommets : $A\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{8}},-\frac{1}{4}\right)$, $A'\left(-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{3}{8}},-\frac{1}{4}\right)$, $B\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ et $B'\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$. $c=\sqrt{a^2-b^2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$. $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Foyers : $F\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4},-\frac{1}{4}\right)$ et $F'\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4},-\frac{1}{4}\right)$.
Directrices : $x=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $x=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 2☺

soit $\propto$ un réel et R=$(O\,;\vec{i};\vec{j})$ un repère orthonormé direct

$C_\propto=\{M(x;y)/x^2+y^2+2\propto xy-1=0\}$

1)Discuter suivant les valeurs de $\propto$ la nature de la conique

2) préciser les coniques $C_0; C_1; C_{-1}$

3)on considère le repère R'$(O;\vec{u};\vec{v})$ image de R par la rotation de centre O et d'angle Θ

Montrer que $x= X\cos\Theta - Y\sin\Theta$ et $y= X\sin\Theta + Y\cos\Theta$

+4)a) montrer que le terme en XY est $2\alpha\cos(2\Theta)$

b)En déduire alors Θ pour que le terme XY n'apparait pas dans l'expression

c)quel est alors C_α

5) en déduire a, b et c si $\alpha=1/2$ et si $\alpha=2$

Indication

Pour la question 3 écrire M(x ;y) dans R $\begin{cases} x = OM cos\varphi \\ y = OM sin\varphi \end{cases}$ $\theta = \varphi' - \varphi + 2k\pi \; k \in Z$

vous remarquer alors que $\begin{cases} X = \cos(\varphi') = OM \cos(\theta + \varphi) \\ Y = \sin(\varphi') = OM sin(\theta + \varphi) \end{cases}$ M(X ;Y) dans R'

Correction ☺à faire

Exercice 3 ☺ SC2016

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on désigne par (E) l'ellipse d'équation : $x^2 + 9y^2 = 9$.

Dans la figure 1 de l'annexe 1 jointe, (C_1) est le cercle de centre O et de rayon 1, (C_2) est le cercle de centre O et de rayon 3, N est le point de coordonnées $(\cos\theta , \sin\theta)$. P est le point de coordonnées $(3\cos\theta , 3\sin\theta)$, où θ est un réel appartenant à $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

1) Soit M le point de coordonnées $(3\cos\theta , \sin\theta)$.

a) Vérifier que M est un point de l'ellipse (E).

b) Placer le point M.

c) Justifier qu'une équation de la tangente T à (E) en M est $x\cos\theta + 3y\sin\theta = 3$.

2) La tangente T à (E) en M coupe l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées respectivement en H et K.

a) Déterminer les coordonnées des points H et K.

b) Montrer que $HK^2 = \frac{9}{\cos^2\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}$.

3) Soit f la fonction définie sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(\theta) = HK^2$.

a) Montrer que pour tout $\theta \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, $f'(\theta) = 2\left(4\sin^2\theta - 1\right)\frac{\cos^2\theta + 3\sin^2\theta}{\cos^3\theta\sin^3\theta}$.

b) En déduire que la distance HK est minimale si et seulement si $\theta = \frac{\pi}{6}$.

c) On désigne par D le point de l'ellipse (E) correspondant à $\theta = \frac{\pi}{6}$.

Construire le point D ainsi que la tangente en ce point à l'ellipse (E).

Correction ☺

a) $(3\cos\theta)^2 + 9(\sin\theta)^2 = 9(\cos\theta)^2 + 9(\sin\theta)^2 = 9$ donc M est un point de (E).

b) $\begin{cases} x_M = x_P \\ y_M = y_N \end{cases}$.

c) $T : 3(\cos\theta)x + 9(\sin\theta)y = 9 \Leftrightarrow x\cos\theta + 3y\sin\theta = 3.$

1) a) $(3\cos\theta)^2 + 9(\sin\theta)^2 = 9(\cos\theta)^2 + 9(\sin\theta)^2 = 9$ donc M est un point de (E).

b) $\begin{cases} x_M = x_P \\ y_M = y_N \end{cases}$.

c) $T : 3(\cos\theta)x + 9(\sin\theta)y = 9 \Leftrightarrow x\cos\theta + 3y\sin\theta = 3$.

2) a) $H(x,y) \in T \cap (O,\vec{i}) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x\cos\theta + 3y\sin\theta = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \dfrac{3}{\cos\theta} \end{cases}$, il en résulte que $H\left(\dfrac{3}{\cos\theta}, 0\right)$.

$K(x,y) \in T \cap (O,\vec{j}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x\cos\theta + 3y\sin\theta = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{1}{\sin\theta} \end{cases}$, il en résulte que $K\left(0, \dfrac{1}{\sin\theta}\right)$.

b) $HK^2 = \left(\dfrac{3}{\cos\theta}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\sin\theta}\right)^2 = \dfrac{9}{\cos^2\theta} + \dfrac{1}{\sin^2\theta}$.

3) a) La fonction f est dérivable sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et

$$f'(\theta) = \frac{18\cos\theta\sin\theta}{\cos^4\theta} - \frac{2\cos\theta\sin\theta}{\sin^4\theta} = \frac{18\sin^4\theta - 2\cos^4\theta}{\cos^3\theta\sin^3\theta} = 2\left(4\sin^2\theta - 1\right)\frac{3\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos^3\theta\sin^3\theta}.$$

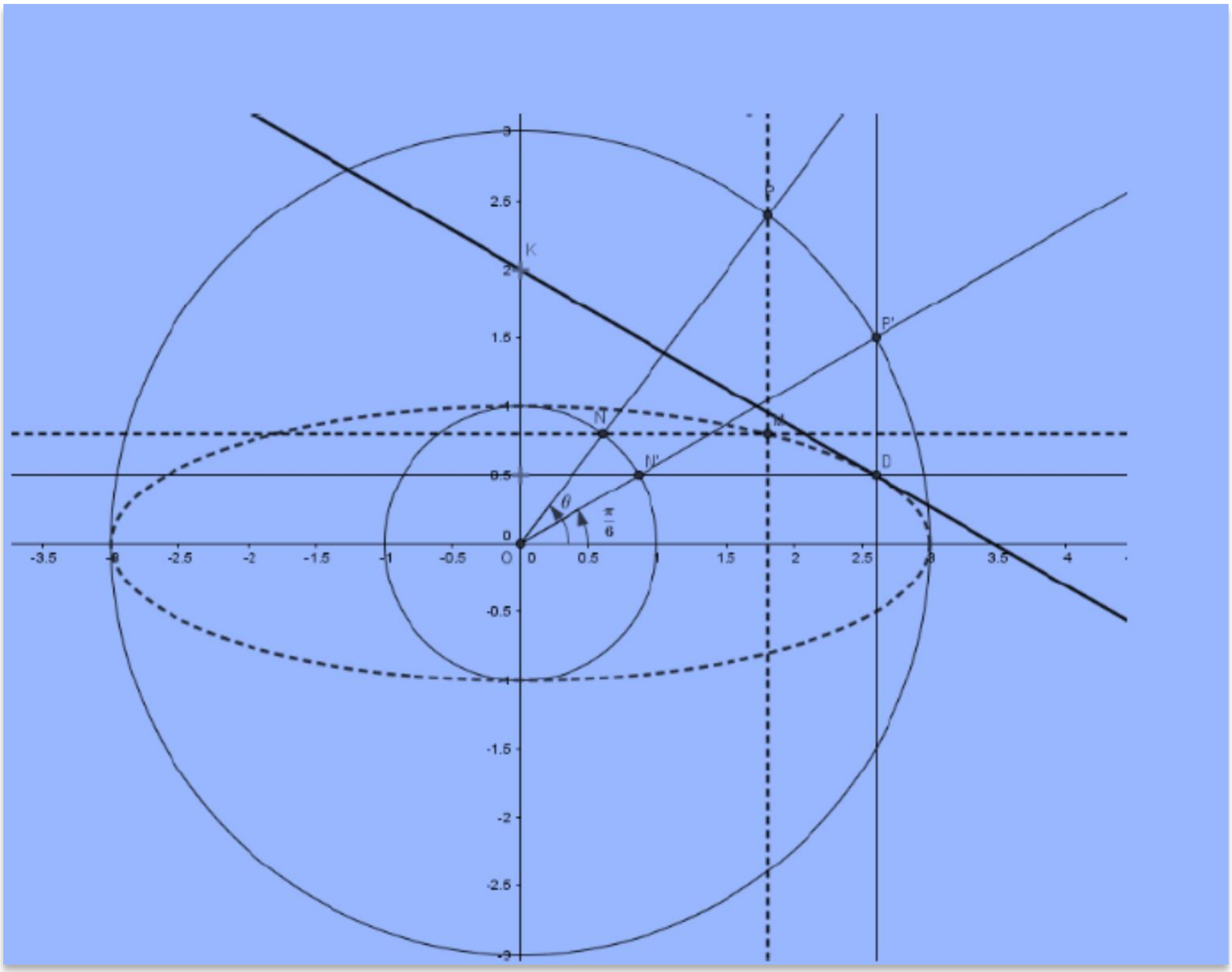
b) Le signe de $f'(\theta)$ est celui de $4\sin^2\theta - 1 = (2\sin\theta - 1)(2\sin\theta + 1)$.

$$\begin{cases} f'(\theta) = 0 \\ \theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin\theta - 1 = 0 \\ \theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[\end{cases} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}.$$

θ	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f(\theta)$		$+\infty \searrow$	16	$\nearrow +\infty$	

D'après le tableau de variation HK est minimale si et seulement si $\theta = \dfrac{\pi}{6}$.

c) Voir figure.



Exercice 4 ☺ SP2009

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère l'ellipse $(\mathcal{E})$ d'équation $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ et on désigne par M le point de coordonnées $(\cos\theta\ ,\ 2\sin\theta)$, où θ est un réel de $\left]0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right[$.

1) a) Déterminer, par leurs coordonnées, les sommets et les foyers de $(\mathcal{E})$.

b) Tracer $(\mathcal{E})$ et placer ses foyers.

c) Vérifier que le point M appartient à $(\mathcal{E})$.

2) Soit (T) la tangente à $(\mathcal{E})$ en M.

Montrer qu'une équation de (T) dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ est $2x\cos\theta + y\sin\theta - 2 = 0$.

3) On désigne respectivement par P et Q les points d'intersection de (T) avec l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées et on désigne par $\mathscr{A}$ l'aire du triangle OPQ.

a) Montrer que $\mathscr{A} = \dfrac{2}{\sin(2\theta)}$.

b) En déduire que l'aire $\mathscr{A}$ est minimale si et seulement si M est le milieu du segment [PQ].

Correction ☺

1) a- L'ellipse $(\mathcal{E})$ a pour équation, dans le repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$, $\dfrac{x^2}{1^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$

$a=1$, $b=2$ et comme $a<b$, l'axe focal est $(O,\vec{j})$.

Les sommets suivant l'axe focal de $(\mathcal{E})$ ont pour coordonnées $(0,-2)$ et $(0,2)$

Les sommets suivant l'axe non focal de $(\mathcal{E})$ ont pour coordonnées $(-1,0)$ et $(1,0)$

Comme $c=\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{3}$ donc les foyers de $(\mathcal{E})$ ont pour coordonnées $(0,-\sqrt{3})$ et $(0,\sqrt{3})$

b- voir figure ci-contre

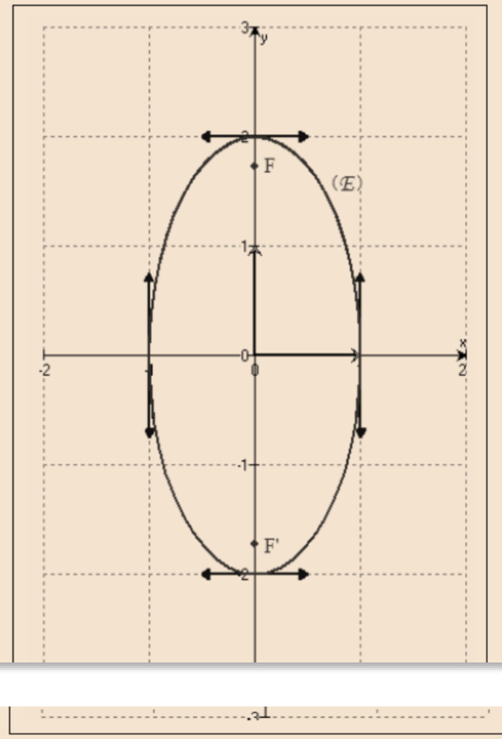
c- $\dfrac{\cos^2 x}{1^2}+\dfrac{4\sin^2 x}{2^2}=\cos^2 x+\sin^2 x=1$.

Donc $M\in(\mathcal{E})$

2) Une équation de la tangente à $(\mathscr{E})$ en un point $\mathrm{M}(x_0, y_0)$ est :

$\mathrm{T} : \dfrac{xx_0}{1^2} + \dfrac{yy_0}{2^2} = 1$ par suite pour $\mathrm{M}(\cos\theta, 2\sin\theta)$ on aura

$\mathrm{T} : x\cos\theta + \dfrac{2y\sin\theta}{4} = 1$ d'où $\mathrm{T} : 2x\cos\theta + y\sin\theta - 2 = 0$.

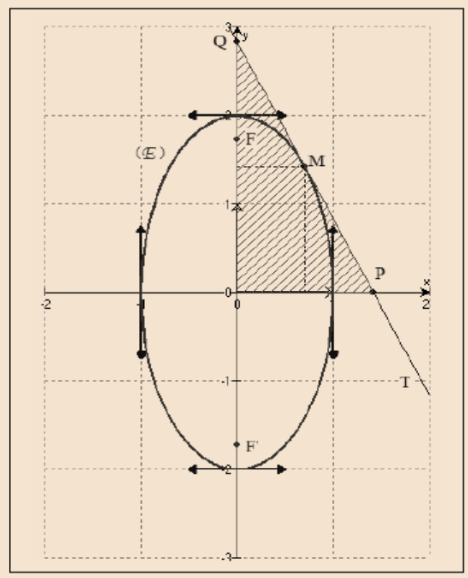


3) a- Le triangle OPQ est rectangle en O

donc l'aire $\mathscr{A} = \dfrac{1}{2} \times \mathrm{OP} \times \mathrm{OQ}$

Or $\begin{cases} \mathrm{P} \in (\mathrm{O}, \vec{\mathrm{i}}) \\ \mathrm{P} \in \mathrm{T} \end{cases}$ donc $\begin{cases} y_{\mathrm{P}} = 0 \\ 2x_{\mathrm{P}}\cos\theta = 2 \end{cases}$ d'où $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{\cos\theta}, 0\right)$

de même $\begin{cases} \mathrm{Q} \in (\mathrm{O}, \vec{\mathrm{j}}) \\ \mathrm{Q} \in \mathrm{T} \end{cases}$ donc $\begin{cases} x_{\mathrm{Q}} = 0 \\ y_{\mathrm{Q}}\sin\theta = 2 \end{cases}$ d'où $\mathrm{Q}\left(0, \dfrac{2}{\sin\theta}\right)$



De plus $\cos\theta > 0$ et $\sin\theta > 0$ pour tout $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$

Ainsi $\mathscr{A} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{\cos\theta} \times \dfrac{2}{\sin\theta} = \dfrac{2}{2\cos\theta\sin\theta} = \dfrac{2}{\sin(2\theta)}$

donc $\mathscr{A} = \dfrac{2}{\sin(2\theta)}$.

b- L'aire $\mathscr{A} = \dfrac{2}{\sin(2\theta)}$ est minimale si et seulement si

$\sin 2\theta$ est maximum or $0 < 2\theta < \pi$ donc $0 < \sin 2\theta \leq 1$

d'où $\mathscr{A}$ est minimale si et seulement si $2\theta = \dfrac{\pi}{2}$

par suite $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ d'ou : $\mathrm{P}(\sqrt{2}, 0)$, $\mathrm{Q}(0, 2\sqrt{2})$ et $\mathrm{M}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$

ce qui prouve que M est le milieu du segment $[\mathrm{PQ}]$.