BAC 2018

Exercice 1 ☺ corrigé

Une urne contient 5 boules rouges numérotées 1, 1, 1,0, 0 et 4 boules vertes numérotées : 1, 1, 1, 0.

L'épreuve consiste à tirer simultanément trois boules de l'urne.

1°/ Calculer la probabilité des événements :

A : « Obtenir 3 boules de la même couleur ».

B : « Obtenir 3 boules portant le même numéro ».

2°/ A et B sont-ils indépendants ?

3°/ Calculer la probabilité d'avoir 3 boules de la même couleur ou trois boules portant le même numéro.

4°/ Calculer la probabilité d'obtenir au plus une boule verte.

Exercice 2 ☺ corrigé

Un jeu consiste à lancer un dé parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Si nous obtenons 1 nous tirons une boule dans l'urne A; si nous obtenons 2 ou 3 nous tirons une boule dans l'urne B; si nous obtenons 4, 5 ou 6 nous tirons une boule dans l'urne C.

* l'urne A contient quatre boules blanches et une boule noire.
* L'urne B contient quatre blanches et quatre noires.
* L'urne C contient trois blanches et sept noires.

1°/ a) Calculer la probabilité de tirer une boule noire sachant qu'elle provient de l'urne A.

b) En déduire la probabilité de l'événement :

H : « la boule est noire et provient de l'urne A ».

c) Calculer la probabilité de tirer une boule noire.

2°/ Nous savons que la boule tirée est noire, quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'urne A? de l'urne B? de l'urne C?

Exercice 3 ☺ **Facile**

Une maladie atteint 3% d'une population donnée. Un test de dépistage donne les résultats suivants :

Chez les individus malades, 95% des tests sont positifs et 5% négatifs.

Chez les individus non malades, 1% des tests sont positifs et 99% négatifs.

On choisit un individu au hasard.

1. Construire l'arbre pondéré de cette expérience aléatoire.

2. Quelle est la probabilité

a. qu'il soit malade et qu'il ait un test positif ?

b. qu'il ne soit pas malade et qu'il ait un test négatif ?

c. qu'il ait un test positif ?

d. qu'il ait un test négatif ?

3. Calculer la probabilité

a. qu'il ne soit pas malade, sachant que le test est positif ?

b. qu'il soit malade, sachant que le test est négatif ?

Exercice 4 ☺ **corrigé**

On dispose de trois machines pour contrôler les pièces fabriquées par une usine. Chaque machine accepte une partie des pièces et refuse les autres.

Si une pièce est refusé par une machine, elle est définitivement éliminée et n'est plus contrôlée par les autres machines.
Pour être acceptée, une pièce doit être contrôlée dans l'ordre par la première machine, la deuxième, la troisième.

La première machine accepte 70% des pièces ; la deuxième 80% de celles qu'elle reçoit, la troisième 95%. Calculer, pour une pièce prise au hasard, les probabilités suivantes :

1°/ La pièce sera acceptée par la deuxième machine.
2°/ La pièce sera refusée par la deuxième machine.
3°/ La pièce sera acceptée par la troisième machine.
4°/ La pièce sera refusée par la troisième machine.

On considère un dé cubique non truqué et deux urnes U_1 et U_2. Le dé est formé de deux faces portant le numéro « 1 » et quatre faces portant le numéro « 2 ». L'urne U_1 contient 4 boules blanches et 3 noires. L'urne U_2 contient 3 boules blanches et 2 noires.

1°/ On lance le dé une fois et on tire simultanément deux boules de l'urne désignée par le numéro que fait sortir le dé. On considère les évènements suivants :

N : " Obtenir le numéro1 " et A : " Obtenir deux boules de même couleur "

a/ Calculer : $p(N)$, $p(\overline{N})$, $p(A|N)$, $p(A|\overline{N})$. En déduire $p(A)$

b/ Sachant qu'on a tiré deux boules de même couleur, qu'elle est la probabilité pour qu'elle proviennent de l'urne U_1 ?

Soluion

Exercice 1 ☺

A : {R, R, R} ou {V, V, V}.

1°/ • $P(A) = \dfrac{C_5^3 + C_4^3}{C_9^3} = \dfrac{10+4}{84} = \dfrac{1}{6}$

• $P(B) = \dfrac{C_6^3 + C_3^3}{C_9^3} = \dfrac{21}{84} = \dfrac{1}{4}$

2°/ On sait que A et B sont indépendants si et seulement si :
$P(A \cap B) = P(A).P(B)$.

$A \cap B$: « Avoir trois boules de même couleur et de même numéro » :
$R_1\ R_1\ R_1$ ou $V_1\ V_1\ V_1$.

$\Rightarrow P(A \cap B) = \dfrac{C_3^3 + C_3^3}{C_9^3} = \dfrac{2}{84} = \dfrac{1}{42}$.

on a : $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$ donc A et B ne sont pas indépendants.

3°/ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{42} = \dfrac{11}{28}$.

4°/ Soit l'événement :
C : « Obtenir au plus une boule verte »
C : {V, R, R} ou {R, R, R}

d'où $P(C) = \dfrac{C_4^1 \cdot C_5^2 + C_5^3}{C_9^3} = \dfrac{40+10}{84} = \dfrac{50}{84} = \dfrac{25}{42}$

Exercice 2 ☺

1°/ a) Soit N : « obtenir une boule noire »

A : « tirer une boule de l'urne A »

soit E : « $N|A$ »

$$P(E)=P(N|A)=\frac{1}{5}$$

b) H : « $N\cap A$ »

$$P(H)=P(N\cap A)=P(N|A)\cdot P(A) \quad \text{or} \quad P(N|A)=\frac{1}{5}$$

et $P(A)=P[\text{obtenir le numéro 1}]=\dfrac{1}{6}$ donc $P(H)=\dfrac{1}{30}$

c) $P(N)=P(N\cap A)+p(N\cap B)+p(N\cap C)$

(principe de la probabilité totale)

$$P(N)=P(N|A)\cdot P(A)+P(N|B)\cdot P(B)+P(N|C)\cdot P(C)$$

$$=\frac{1}{5}\times\frac{1}{6}+\frac{4}{8}\times\frac{2}{6}+\frac{7}{10}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{30}+\frac{1}{6}+\frac{7}{20}=\frac{11}{20}$$

2°/ * on demande de calculer la probabilité des événements :

« $A|N$ » ; « $B|N$ » et « $C|N$ »

$$P(A|N)=\frac{P(A\cap N)}{P(N)}=\frac{1}{30}\times\frac{20}{11}=\frac{2}{33}$$

* $$P(B|N)=\frac{P(B\cap N)}{P(N)}=\frac{P(N|B)\cdot P(B)}{P(N)}$$

$$=\frac{4}{8}\times\frac{2}{6}\times\frac{20}{11}=\frac{10}{33}$$

Exercice 4 ☺

A_1 « la pièce est acceptée par la 1ère machine »

A_2 « la pièce est acceptée par la 2ème machine »

A_3 « la pièce est acceptée par la 3ème machine »

on a : $A_3 \subset A_2 \subset A_1$

on a : $P(A_1) = 0{,}7$; $P(A_2 | A_1) = 0{,}8$

$$P(A_3 | A_1 \cap A_2) = \frac{95}{100} = 0{,}95$$

on a : $P(A_2) = P(A_2 \cap A_1) + P(A_2 \cap \overline{A}_1)$

$$= P(A_2 | A_1) \cdot P(A_1) + P(A_2 | \overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_1)$$

$$= (0{,}8 \times 0{,}7) + 0 = 0{,}56$$

2°/ Soit B « la pièce est refusée par la deuxième machine ».

$B = A_1 \cap \overline{A}_2$

$P(B) = P(A_1 \cap \overline{A}_2) = P(A_1) - P(A_1 \cap A_2)$

$P(B) = 0{,}7 - 0{,}56 = 0{,}14$

3°/ $P(A_3) = P(A_3 \cap A_2) + p(A_3 \cap \overline{A}_2)$

$$= P(A_3 | A_2) \cdot P(A_2) + P(A_3 | \overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_2)$$

$$= P(A_3 | A_1 \cap A_2) \cdot P(A_2) + 0 = 0{,}532$$

4°/ Soit C « la pièce est refusée par la troisième machine »

$C = (A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3)$ or $A_2 \subset A_1$ donc $A_2 \cap A_1 = A_2$

$C = A_2 \cap \overline{A}_3$

$P(C) = p(A_2 \cap \overline{A}_3) = p(A_2) - P(A_2 \cap A_3)$

$= 0{,}56 - 0{,}532 = 0{,}028$

Exercice 5 ☺

1°/ a/ $p(N)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ Et $p(\overline{N})=1-p(N)=\frac{2}{3}$

- « $A|N$ » est l'évènement : « Tirer deux boules de même couleur de l'urne U_1 »

  Donc : $p(A|N)=\frac{C_4^2+C_3^2}{C_7^2}=\frac{6+3}{21}=\frac{3}{7}$

- « $A|\overline{N}$ » est l'évènement : « Tirer deux boules de même couleur de l'urne U_2 »

  Donc : $p(A|\overline{N})=\frac{C_3^2+C_2^2}{C_5^2}=\frac{3+1}{10}=\frac{2}{5}$

- D'après la loi des probabilités totales on a : $p(A)=p(N)\times p(A|N)+p(\overline{N})\times p(A|\overline{N})=\boxed{\frac{43}{105}}$

b/ La probabilité d'obtenir deux boules de U_1 sachant qu'on a tiré deux boules de même couleur est :

$$p(N|A)=\frac{p(N\cap A)}{p(A)}=\frac{p(N)\times p(A|N)}{p(A)}=\frac{1}{3}\times\frac{3}{7}\times\frac{105}{43}=\frac{15}{43}$$

c/ Considérons l'évènement B : « Obtenir deux boules blanches »

La probabilité d'obtenir deux boules blanches sachant qu'on a tiré deux boules de même couleur est :

$$p(B|A)=\frac{p(B\cap A)}{p(A)}=\frac{p(B)}{p(A)} \text{ Car } B\subset A$$

$$p(B)=p(N)\times p(B|N)+p(\overline{N})\times p(B|\overline{N})=\frac{1}{3}\times\frac{C_4^2}{C_7^2}+\frac{2}{3}\times\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{31}{105} \text{ Donc : } p(B|A)=\frac{31}{105}\times\frac{105}{43}=\frac{31}{43}$$