Devoir de Synthèse N° 1

Exercice n°1 :(4 points)

La courbe ci-dessous représente une fonction qui admet quatre asymptotes

1) Déterminer l'équation de chaque une des asymptotes : D_1 ; D_2 et D_3

2) Déterminer les domaines : de définition de continuité et de dérivabilité

3) Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)\ ;\ \lim_{x\to+\infty} f(x)+\frac{2}{3}x-2 \quad et \quad \lim_{x\to-2^-} f(x)$$

4) Déterminer : $f_d'(-4)$; $f'(2)$ et $\lim_{x\to-4^-}\frac{f(x)+1}{x+4}$

5) Soit $g(x)=\sqrt{x+2}\ f(x)$ et (ξ_g) ca courbe représentative

a) Montrer que : $\lim_{x\to2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\frac{1}{2}$

b) Déterminer l'équation de la tangente à ξ_g au point d'abscisse $x_0 = 2$

Exercice n°2 :(7points)

I) Soit f(x) une fonction définie sur IR \ {1} par $f(x)=\frac{ax^2+4x+b}{x-1}$ ou a et b deux réels

et ξ_f ca courbe représentative dans un repère $R(O;\vec{i};\vec{j})$

1) a) Montrer que f est dérivable pour tout réel $x\in IR\setminus\{1\}$ et que : $f'(x)=\frac{ax^2-2ax-4-b}{(x-1)^2}$

b) Déterminer a et b pour que ξ_f admet une tangente parallèle à l'axe $(O,\vec{\imath})$ au point A(-1 ;2)

2) Pour la suite de l'exercice on prend : a = 1 et b= - 1

a) Montrer que : $f(x)=x+5+\frac{4}{x-1}$

b) Montrer que la droite $\Delta : y = x + 5$ est une asymptote oblique au voisinage de $(+\infty)$.

c) Etudier la position relative de ξf et Δ.

3) Déterminer les coordonnées des points ou les tangentes à (ξf) soit parallèle à la droite D : $y = -3x+5$.

II) Soit la fonction g définie par : $g(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x < 0 \\ \sqrt{x^2+1} - \frac{3}{2}x & si\ x \geq 0. \end{cases}$ et ξg ca courbe représentative

1) Montrer que g est définie sur IR.

2) Montrer que g est continue en 0.

3)a) Etudier la dérivabilité de g en 0.

b) En déduire que la courbe de g admet au point d'abscisse 0 deux demi-tangentes dont on déterminera leurs équations.

4) a) Calculer : $\lim_{x \to +\infty} g(x)$

b- Montrer que la courbe ξg admet une asymptote oblique $\Delta' : y = \frac{-1}{2}x$.

Exercice n°3 :(3,5points)

Le plan est orienté dans le sens direct ; Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $(\widehat{\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}}) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi)$.

Et soit Δ la médiatrice du segment [BC] qui coupe (AC) en O. On désigne par I le milieu de [BC] et par D le symétrique de A par rapport à Δ.

1) Donner une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BO})$.

2) Vérifier que le triangle ABI est équilatéral.

3)a) Déterminer la mesure de l'angle orienté$(\overrightarrow{IO}; \overrightarrow{IA})$.

b) En déduire la nature de quadrilatère ABID.

4) Soit (ζ) le cercle de centre I et de rayon IA. Déterminer les ensembles suivants :

$\Delta = \{M \in \mathbf{P}$ tel que : $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AM}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]\ \}$

$\Gamma = \left\{M \in P \text{ tel que: } \left(\widehat{\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}(2\pi)\right\}$.

Exercice n°4 :(5,5points)

On donne $A(x) = cos(2x) - sin(2x) + 1$.

1) Calculer $A\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $A\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

2) a) Montrer que $cos(2x) - sin(2x) = \sqrt{2} cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ pour tout réel x.

b- Résoudre Dans IR puis dans $[-\pi; \pi[$: $A(x) = 0$

3) Montrer que pour tout réel x, on a : $A(x) = 2\,cos(x)\,(cosx - sinx)$.

4) On pose $B(x) = \frac{2\cos(2x)}{A(x)}$

a) Déterminer l'ensemble D des réels x tel que B(x) existe.

b) Montrer que pour tout $x \in D$ on a : $B(x) = 1 + tan(x)$.

En déduire la valeur exacte de $\tan(\frac{\pi}{8})$

Exercice n°5 :

Le plan est rapporté à un repère O.N.D : R(O; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$). on considère le point $A(\sqrt{3};\ 1)$ et B tel que le triangle OAB soit un triangle rectangle et isocèle direct en A.

1) Déterminer les coordonnées polaires de A puis placer A et B.

2) Vérifier que les coordonnées polaires de B $\left(2\sqrt{2};\ \frac{5\pi}{12}\right)$.

3) On désigne par $(a; b)$ les coordonnées cartésiennes de B.

a-Calculer $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ de deux manières puis déduire que $b = 4 - a\sqrt{3}$.

b- Calculer det $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$ de deux façons et déduire que $a = b\sqrt{3} - 4$.

c- Calculer alors a et b et déduire : $cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et $sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

4) Résoudre dans IR puis dans]-π ; π] les équations suivantes :

a) $2\,sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1.$

b) $\left(\sqrt{6} - 2\right)cos(2x) + \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)sin(2x) = 2$

Exercice n°6 :

On donne dans un repère orthonormé $R(O;\vec{i};\vec{j})$ les points A(-2 ;0) ; B(1 ;$\sqrt{3}$)

1) a) Déterminer les coordonnées polaires des points A et B.

b) En déduire la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA})$

2) a) Calculer $cos(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AB})$ et $sin(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AB})$

b) En déduire la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AB})$

3) Résoudre dans $[0; 2\pi[$ l'équation $\cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)$ et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique

4) Résoudre dans $[-\pi;\pi[$ l'inéquation $sin2x < \frac{\sqrt{3}}{2}$