

EXERCICE N° : 1 (6 POINTS)

- 1) a) Vérifier que $(1-2\sqrt{3}i)^2 = -11 - 4i\sqrt{3}$
- b) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^2 - z + 3 + i\sqrt{3} = 0$
- c) Mettre les solutions sous forme exponentielle.

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) ,

On donne les points **A, B** et **M** d'affixes respectives : $z_A = i\sqrt{3}$; $z_B = 1 - i\sqrt{3}$ et $z_M = \sqrt{3}e^{i\theta}$; $\theta \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$

- a) Montrer que $z_M - z_A = 2i\sqrt{3}\sin(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4})e^{i(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})}$ en déduire la distance AM en fonction de θ .
- b) Déterminer θ pour que le triangle OAM soit isocèle en A.
- 3) Atout point M d'affixe z tel que $z \neq i\sqrt{3}$ on associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = i\left(\frac{z-1+\sqrt{3}i}{z-i\sqrt{3}}\right)$

a) Montrer que pour tout $z \neq i\sqrt{3}$ on a : $|z'| = \frac{BM}{AM}$ et $\arg(z') \equiv \frac{\pi}{2} + (\overline{AM}, \overline{BM}) [2\pi]$

b) Déterminer les deux ensembles suivants :

$$E = \{M(z) \in P / |z'| = 1\} \quad \text{et} \quad F = \{M(z) \in P / z' \text{ imaginaire}\}$$

EXERCICE N° : 2(5 POINTS)

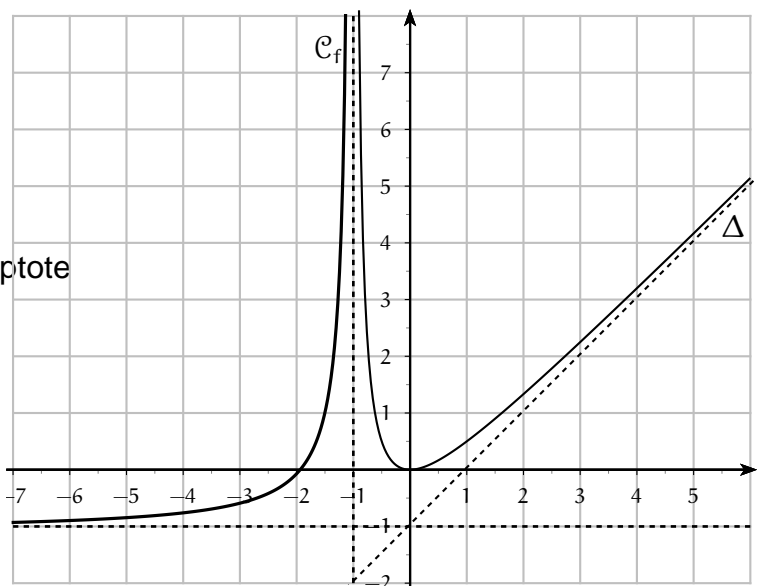
La courbe ci-dessous représente une fonction

f définie et continue sur $\mathbb{R}/\{-1\}$ qui admet :

- La droite $\Delta : y=x-1$ comme asymptote oblique au voisinage de $(+\infty)$
- La droite $\Delta' : y=-1$ comme asymptote au voisinage de $(-\infty)$
- La droite d'équation $x=-1$ comme asymptote verticale à Cf

1) Déterminer graphiquement

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x + 1)$
- b) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$. En déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f\left(\frac{-x+1}{x+1}\right)$
- c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x^2)}{x}$



2) Soit la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$

a) Déterminer l'ensemble de définition de g

b) Montrer que g est prolongeable par continuité en -1

3) a) Montrer que la fonction $f \circ f$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f \circ f)(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f \circ f)(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f \circ f(x)}{f(x)}$

EXERCICE N° : 3 (4 POINTS)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \begin{cases} x \left(\sin\left(\frac{1}{x}\right) - 1 \right) + 1 & ; \text{ si } x < 0 \\ x^3 - 3x + 1 & ; \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x^2 - x} - x & ; \text{ si } x > 1 \end{cases}$

1) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1/2$. Interpréter graphiquement le résultat

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ obtenu.

2) a) Montrer que pour tout $x < 0$, on a: $1 \leq f(x) \leq -2x + 1$.

a) En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ puis montrer que f est continue en 0 .

b) Montrer que f est continue en 1 .

3) a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une **unique** solution α dans $]0,1[$

b) Montrer que $\alpha = \frac{1}{3-\alpha^2}$

EXERCICE N° : 4 (5 POINTS)

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1+2u_n}{2+u_n}$

1) a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 1$

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 \leq 1 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(1 - u_n)$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 \leq 1 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ puis retrouver $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

3) Soit la somme $S_n = \sum_{k=1}^n u_k, n \geq 1$

a) Montrer que pour tout entier $n \geq 1, n-1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq S_n \leq n$

b) Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n}$.

BON TRAVAIL