Dérivabilité d'une fonction
Equations à coefficients complexes

Séance 2

EXERCICE 1:

Soit la fonction $: x \longmapsto \frac{x^2+x+1}{x-1}$. On désigne par (C) sa courbe représentative selon un repère orthonormé $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) Etablir le tableau de variation de la fonction f.
2) Vérifier que $f(x) = x + 2 + \frac{3}{x-1}$ pour tout réel $x \in$ IR\{1}
3) En déduire que la courbe (C) admet une asymptote oblique Δ au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$ dont on donnera une équation.
4) Etudier la position de (C) par rapport à Δ.
5) Soit la fonction g définie sur IR par : $\begin{cases} g(x) = f(x) & si\ \ x > 2 \\ g(x) = 7 + \sqrt{2-x} & si\ \ x \leq 2 \end{cases}$
   a) Etudier la dérivabilité de g en 2. En déduire une interprétation géométrique.
   b) Etudier la dérivabilité de g sur IR.
   c) Etablir le tableau de variation de la fonction g.

EXERCICE 2:

1) Déterminer les racines carrées de chacun des complexes suivants :

   -16 , -2 , $2i$, $\sqrt{3}+i$, $i.e^{i\frac{5\pi}{6}}$
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes :
   a) $z^2-(2i+1)z+i+1=0$ b) $z^2+4iz-4=0$ c) $iz^2-(1+2i)z+1+i=0$

EXERCICE 3:

Soit l'équation (E) : $z^2+2(\sqrt{3}+i)z+8+8\sqrt{3}i=0$

On désigne par z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation (E).

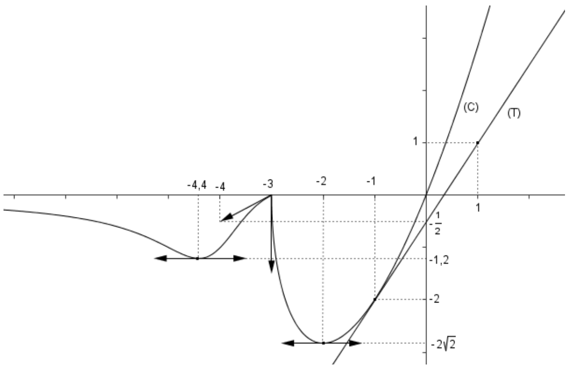
1) a) Sans calculer z_1 et z_2 vérifier que $|z_1.z_2| = 16$ et $\arg(z_1 \times z_2) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$
   b) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure (notée z_1) que l'on déterminera.
   c) En déduire l'autre solution z_2 puis l'écrire sous la forme exponentielle.
2) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (E') : $z^4+2(\sqrt{3}+i)z^2+8+8\sqrt{3}i=0$

EXERCICE 4:

1) On considère l'équation (E) : $z^2-2e^{i\frac{\pi}{5}}z+e^{i\frac{2\pi}{5}}-1=0$
   Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).
2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points A, B et C d'affixes respectifs : $z_A = 2e^{i\frac{\pi}{5}}$, $z_B = 1+e^{i\frac{\pi}{5}}$ et $z_C = -1+e^{i\frac{\pi}{5}}$
   a) Montrer que $z_B = 2\cos\left(\frac{\pi}{10}\right).e^{i\frac{\pi}{10}}$ et que $z_C = 2\sin\left(\frac{\pi}{10}\right).e^{i\frac{3\pi}{5}}$
   b) Montrer que le quadrilatère OBAC est un rectangle.

EXERCICE 5:

Dans le graphique ci-contre on a tracé la courbe représentative d'une fonction f définie sur IR.



⁎ (T) est la tangente à (C) au point A(1,1).

⁎ Chaque flèche représente un vecteur directeur d'une demi-tangente.

⁎ La courbe (C) admet exactement deux tangentes horizontales.

1) a) Déterminer : $f_g'(-3)$ et $\lim\limits_{x\to(-3)^+} \frac{f(x)}{x+3}$

b) Résoudre dans IR l'équation $f'(x) = 0$

2) Déterminer les intervalles sur lesquels f est dérivable.

3) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

EXERCICE 6:

On considère la fonction $f : x \mapsto 1 - \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$; $x \in]0,3[$

1) a) Montrer que f est dérivable sur $]0,3[$ et que $f'(x) = \frac{9}{x^2\sqrt{9-x^2}}$ pour tout $x \in]0,3[$.

b) Etablir le tableau de variation de f.

2) On pose $g(x) = f(x) + x$, $x \in]0,3[$.

a) Dresser le tableau de variation de la fonction g.

b) Montrer que l'équation $f(x) = -x$ admet une unique solution α dans $]1,2[$.

c) Dresser alors le tableau de signe de $g(x)$ pour $\in [1,2]$.

EXERCICE 7 :

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 4\sqrt{2}.z + 16 = 0$. Ecrire les solutions de (E) sous la forme exponentielle.

2) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $z^4 - 4\sqrt{2}.z^2 + 16 = 0$ sous la forme exponentielle.

■ Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

3) On donne les points $A(2e^{i\frac{\pi}{8}})$, $B(-2e^{i\frac{\pi}{8}})$, $C(2e^{-i\frac{\pi}{8}})$ et $D(-2e^{-i\frac{\pi}{8}})$.

Montrer que le quadrilatère ACBD est un rectangle et que son aire $\mathcal{A} = 4\sqrt{2}$