Lycée Cité El-amel
Sola Saidi & Mokhtar Ouardani
Classes : 4ème Maths 1 & 2

Devoir de contrôle n° 3
(Mathématiques)

Année scolaire : 2016/2017
Date : Avril
Durée : 3 heures

Exercice n° 1 (4 points)

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
Soit les points A(0,2,1), B(1,2,0), C(-1,4,1) et D(2,2,2).
1) a- Déterminer $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ puis déduire l'aire du triangle ABC.
b- Soit P le plan contenant les points A, B et C. Montrer que P à pour équation : $2x+y+2z-4=0$.
c- Calculer la distance du point D au plan P. En déduire une équation cartésienne de la sphère S de centre D et tangente au plan P.
2) Soit h l'homothétie de centre D et de rapport 2 et $S'=h(S)$.
a- Préciser le centre et le rayon de S'.
b- Déduire que P coupe S' suivant un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice n° 2 (5 points)

Un panneau STOP a été mis à un carrefour très fréquenté et extrêmement dangereux. On a constaté que 80 % des automobilistes respectent le panneau STOP, que 30% des automobilistes ne respectant pas le panneau STOP ont un accident à ce carrefour et que 95 % des automobilistes respectant le panneau STOP n'ont pas d'accident à ce carrefour.
On considère un automobiliste au hasard arrivant à ce carrefour et on définit les événements suivants :
R : « l'automobiliste a respecté le panneau STOP »
A : « l'automobiliste a eu un accident au carrefour »
1) a- Déterminer $p(\overline{R})$, $p(A/\overline{R})$ et $p(\overline{A}/R)$.

b- Montrer que $p(A)=\dfrac{1}{10}$.

2) Un automobiliste a provoqué un accident à ce carrefour,
Quelle est la probabilité qu'il n'ait pas respecté le panneau STOP.
3) Huit automobilistes arrivent successivement à ce carrefour
a- Quelle est la probabilité pour qu'au moins l'un d'eux ait un accident au carrefour ?
b- Quelle est la probabilité pour que deux au plus de ces automobilistes provoquent un accident ?
4) Au mois de Juin 32000 voitures ont passées par ce carrefour.
Déterminer le nombre moyen d'accidents produits à ce carrefour à ce mois.

Exercice n° 3 (4 points)

1) a- Quel est le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11 ? Justifier.
b- Quel est le reste de la division euclidienne de 6^{4} par 5 ? Justifier.
c- En déduire que $6^{40}\equiv 1[11]$ et $6^{40}\equiv 1[5]$.
d- Démontrer que $6^{40}-1$ est divisible par 55.
2) Soit x et y deux entiers relatifs.
a- Montrer que l'équation (E) : $65x-40y=1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$.
b- Montrer que l'équation (E') : $17x-40y=1$ admet au moins une solution dans $\mathbb{Z}^2$.
c- Déterminer a l'aide de l'algorithme d'Euclide un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E')
d- Déterminer l'inverse de 17 modulo 40.
3) Pour tout entier naturel a, démontrer que si $a^{17}\equiv b[55]$ et si $a^{40}\equiv 1[55]$ alors $b^{33}\equiv a[55]$.

Exercice n° 4 (7 points)

On considère la fonction f définie sur [0,1] par: $f(x)=\dfrac{x-1}{\ln x}$ pour tout $x\in]0,1[$, $f(0)=0$ et $f(1)=1$.

1) Soit φ la fonction f définie sur]0,1[par: $\varphi(x)=\ln(x)+\dfrac{1}{x}-1$.

a- Dresser le tableau de variation de φ..

b- Déduire le signe de $\varphi(x)$ sur]0,1[.

2) a- Montrer que f est continue à droite 0 et à gauche en 1.

b- Etudier la dérivabilité de f en 0.Que peut-on déduire pour la tangente au point O de la courbe C_f ?

3) a- Montrer que pour tout $x\in[-\dfrac{1}{2},0]$, on a : $0\le\dfrac{1}{1+x}-(1-x)\le 2x^2$.

b- Montrer que alors que pour tout $x\in[-\dfrac{1}{2},0]$, on a : $\dfrac{2}{3}x^3\le\ln(1+x)-(x-\dfrac{1}{2}x^2)\le 0$.

c- En déduire que pour tout $x\in[-\dfrac{1}{2},0]$, on a : $\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2\le\ln(1+x)-x\le-\dfrac{1}{2}x^2$.

4) Soit g la fonction définie sur $]0,1]$ par $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.

a- Montrer que pour tout $h\in[-\dfrac{1}{2},0]$, on a : $\dfrac{2}{3}h-\dfrac{1}{2}\le\dfrac{g(1+h)-g(1)}{h}\le-\dfrac{1}{2}$.

b- En déduire que g est dérivable à gauche en 1et préciser $g_g^{'}(1)$.

c- Déduire que f est dérivable à gauche en 1 et que $f_g^{'}(1)=\dfrac{1}{2}$.

6) a- Montrer que pour tout $x\in]0,1[$, on a : $f'(x)=\dfrac{\varphi(x)}{(\ln x)^2}$.

b- Dresser le tableau de variation de f sur [0,1].

c- Tracer la courbe C_f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. (unité graphique : 10 cm).

Partie facultative

1) a- Montrer, en utilisant le tableau de variation de f, que pour tout $x \in]0,1]$ on a: $\ln(x) \leq x-1$.

b- En déduire que pour tout $x \in]-1,0]$ on a: $\ln(1+x) \leq x$.

2) Soit (U_n) la suite définie, pour tout entier naturel non nul n, par: $U_n = (1+\frac{1}{n})^n$.

En utilisant 1) a-, montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $\ln(1+\frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n}$ et que $U_n \leq e$.

3) En utilisant 1) b- montrer pour tout entier $n \succ 1$, on a : $-n.\ln(1-\frac{1}{n}) \geq 1$, et que $(1-\frac{1}{n})^{-n} \geq e$.

4) En déduire que pour tout n ≥ 1, on a : $U_n \leq e \leq (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ et que : $0 \leq e - U_n \leq \frac{e}{n}$.

5) En déduire que (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

6) a) Montrer que pour tout x > 0, on a : $\frac{1}{x+1} \leq \ln(1+x) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$.

b) Soit (v_n) la suite définie sur IN* par $v_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n}$.

Montrer que pour tout n ≥ 1, on a : $v_n \leq \ln(\frac{n+1}{n}.\frac{n+2}{n+1}.\frac{n+3}{n+2}\ldots\frac{2n}{2n-1}) \leq v_n + \frac{1}{2n}$.

c) Montrer que (v_n) est convergente et donner sa limite.