Exercice 1

Soit f_n $la\ fonction\ definie\ sur\ [0,1]\ par\ f_n(x) = x^n \sin(\pi x)$

1) Montrer qu'il existe un réel $\alpha_n \epsilon\ ]0,1[$ tel que $f'(\alpha_n)=0$
2) Exprimer $\sin(\pi\alpha_n)$ en fonction de α_n et de $\cos(\pi\alpha_n)$. En déduire que : $f_n(\alpha_n) = -\dfrac{\pi\alpha_n^{n+1}}{n}\cos(\pi\alpha_n)$
3) En déduire que $|f_n(\alpha_n)| \leq \frac{\pi}{n}$ En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(\alpha_n)$.

Exercice 2

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x > 0 \\ f(x) = x - (\sin x)^2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

1) a/ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

   b/ Montrer que pour tout $x \leq 0$, on a : $f(x) \leq x$. En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
2) Montrer que est continue sur $\mathbb{R}$.
3) Montrer que f est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ puis déterminer $f(]-\infty, 0])$
4) a/ Montrer que l'équation : $f(x) = -\frac{\pi}{2}$ admet une unique solution α dans $]-\pi, 0[$

   b/Montrer que l'équation f(x) = 0 admet au moins une solution dans $]\frac{2}{3\pi}, \frac{2}{\pi}[$

Exercice 3

1) En utilisant l'une des inégalités des accroissements finies montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $|\sin x| \leq |x|$

2) a) En déduire le sens de variation sur l'intervalle $[0, \pi]$ de la fonction $h : x \mapsto 1 - \cos x - \frac{x^2}{2}$

b) En déduire que $\forall x \in [0, \pi]$ on a : $1 - \cos x - \frac{x^2}{2} \leq 0$

3) a) Montrer que $\forall x \in [0, \pi]$ on a : $x - \sin x \leq \frac{1}{6}x^3$

b) En déduire que $\forall x \in [-\pi, 0]$ on a : $\frac{1}{6}x^3 \leq x - \sin x$

4) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x-\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

a) Montrer que f est continue en 0

b) Montrer que f est dérivable en 0 et déterminer $f'(0)$.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

1) Etudier les variations de f
2) Préciser les banches infinies de la courbe de f
3) Montrer que l'équation f(x) = x admet une unique solution α et que $1 < \alpha < 2$
4) Soit g la fonction sur $]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ par $\begin{cases} g(x) = f(\operatorname{tg} x) & \text{si } x \in]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[\\ g(\frac{\pi}{2}) = 1 \end{cases}$

   Montrer que g est continue sur $]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$.

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}$. On note ($\mathcal{C}$) sa courbe représentative .

1) Montrer que pour tout réel x on a : $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}\,(1+\sqrt{x^2+1})}$
2) Dresser le tableau de variation de f , et préciser les branches infinies de ($\mathcal{C}$).
3) Ecrire l'équation de la tangente T a ($\mathcal{C}$) au point O. puis vérifier que :
   Si $x \leq 0$ on a : $f(x) \geq \frac{1}{2}x$
   Si $x \geq 0$ on a : $f(x) \leq \frac{1}{2}x$
4) Tracer la courbe ($\mathcal{C}$)
5) Soit (U_n) la suite définie sur IN par : $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = f(U_n)$
   a/ Montrer que pour tout n de IN on a : $U_n \in [0,1]$
   b/ Montrer que (U_n) est décroissante ; puis (U_n) est convergente et donner sa limite .
   c/ Montrer que $\forall\ n \in IN$; $U_{n+1} \leq \frac{1}{2}U_n$ puis déduire que $U_n \leq \frac{1}{2^n}$. Retrouver la limite de U.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur IR_+ par : $f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$. On note ($\mathcal{C}$) sa courbe représentative .

1) a/ Etudier la dérivabilité de f a droite en 0 . Interpréter graphiquement ce résultat .
   b/ Dresser le tableau de variation de f
2) a/Montrer que l'équation f(x) = x admet une unique solution $\alpha \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$
   b/ Tracer la courbe ($\mathcal{C}$).
3) Soit (U_n) la suite définie sur IN par : $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = f(U_n)$
   a/ Montrer que $\forall\ n \in IN$; $\frac{1}{2} \leq U_n \leq 1$
   b/ Montrer que $\forall\ x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$; $|f'(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$
   c/ En déduire que : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}|U_n - \alpha|$. En déduire que la suite (U_n) converge .
4) Soit g la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par g(x) = f (tg x) .
   a/ Montrer que g est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$
   b/ Montrer que g est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et calculer g' (x) .

Exercice 7

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{\frac{x}{2-x}}$

1) Préciser l'ensemble de définition I de f .Sur quel ensemble f est elle dérivable ?. Dresser le tableau de variation de f .
2) Montrer que pour tout x de I on a : $f(x) \geq x$. Tracer la courbe de f .
3) a/ Montrer que $\forall\ n \in IN$;l'équation f(x) = n admet une unique solution $x_n \in [0, 2[$
   b/ Déterminer x_0 , x_1 et x_2
   c/ Etudier la monotonie de la suite (x_n).
   d/ En déduire que la suite (x_n) converge puis calculer sa limite .